1. VÝROKOVÁ LOGIKA

1. Negujte výroky s kvantifikátory, výroky g – j a jejich negace zapište i symbolicky
   a) Alespoň 5 dnů bude pršet.
   b) Úloha má právě 2 řešení.
   c) Žádný z předmětů mě nebaví.
   d) Nejvýše 1 kořen dané rovnice je záporný.
   e) Každé sudé číslo je dělitelné dvěma.
   f) Nikdo nepřišel.
   g) Pro všechna reálná čísla x platí: $x^2 \geq x$.
   h) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro něž je $\sqrt{x} \leq 0$.
   i) Pro všechna reálná čísla x je x $> \frac{1}{x}$.
   j) Existuje alespoň jedno reálné číslo x takové, že $\frac{1}{x} > 10$.

2. Negujte složené výroky
   a) Nebudou-li jablka, koupím hrušky.
   b) Mám bratra a sestru.
   c) Číslo je sudé právě tehdy, když je dělitelné dvěma.
   d) Budu se učit nebo poslouchat hudbu.
   e) Nemám hlad ani žízeň.
   f) Napiji se kávy nebo čaje.
   g) Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak má všechny vnitřní úhly shodné.
   h) Jestli se rozzlobíme, budeme zlí.
   i) Alena přijde právě tehdy, když přijde Jana.
   j) Bylo teplo a foukal vítr.

3. Určete, zda jsou dané výrokové formule tautologie
   a) $(\neg a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \vee b)$
   b) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$
   c) $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
   d) $(\neg a \vee b) \Rightarrow \neg (a \wedge \neg b)$
   e) $\neg (\neg a \vee b) \Rightarrow (\neg a \vee \neg b)$
   f) $\neg (a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)]$
   g) $[a \vee \neg (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \vee b) \vee \neg c]$
   h) $[a \Rightarrow (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)]$
   i) $(a \Leftrightarrow \neg b) \vee \neg (a \Rightarrow c)$
   j) $(a \wedge \neg c) \Leftrightarrow [\neg a \vee (b \wedge c)]$
   k) $[a \wedge \neg (b \vee c)] \Rightarrow [\neg b \vee (a \wedge c)]$
   l) $(\neg a \Rightarrow c) \vee [\neg b \wedge (b \Leftrightarrow c)]$

2. ÚPRAVA ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

1. Dělte mnohočleny

a/ $(21x^3 - 31x^2 + 39x - 6) : (7x - 1)$ $\left[3x^2 - 4x + 5 - \frac{1}{7x-1}\right]$

b/ $(8x^3 - 10x^2 - 13x + 19) : (2x - 3)$ $\left[4x^2 + x - 5 + \frac{4}{2x-3}\right]$

c/ $(2a^4 + 16a^2 - 5a^3 - 3a + 2) : (2a^2 - a)$ $\left[a^2 - 2a + 7 + \frac{4a+2}{2a^2-a}\right]$

d/ $(14t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + 3t + 5) : (2t^2 - 1)$ $\left[7t^3 + 2t^2 + 3t + 2 + \frac{6t+7}{2t^2-1}\right]$

e/ $(2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1) : (x^3 - x^2 + 1)$ $\left[2x - 1 + \frac{2}{x^3-x^2+1}\right]$

f/ $(5x^5 + 7x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 23x - 6) : (x^2 + x - 3)$ $[5x^3 + 2x^2 - 7x + 2]$

2. Rozložte mnohočleny na součin

a/ $a^5 + a^3 - a^2 - 1$ $[(a^2 + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)]$

b/ $9a^2 - 9b^2 + 12bc - 4c^2$ $[(3a - 3b + 2c)(3a + 3b - 2c)]$

c/ $a^3 - a^2 - a^6 + a^5$ $[a^2(a - 1)(1 - a)(1 + a^2 + a)]$

d/ $64x^2 + 48x + 9 - 81x^4$ $[(9x^2 + 8x + 3)(-9x^2 + 8x + 3)]$

e/ $(ax - by)^2 + (bx + ay)^2$ $[(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)]$

f/ $27a^3b^6 + 54a^2b^4c^2 + 36ab^2c^4 + 8c^6$ $[(3ab^2 + 2c^2)^3]$

g/ $64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$ $[(4 - 2a)^3]$

3. Zjednodušte a určete, kdy mají dané výrazy smysl

a/ $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$ $\left[\frac{20}{3}; a \neq \pm 1\right]$

b/ $\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$ $\left[\frac{1}{a+b}; a \neq 0; b \neq 0; a \neq \pm b\right]$

c/ $\left[\frac{3}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right] \cdot \frac{x^2-6x+9}{2}$ $\left[\frac{x^2-3x+18}{2(x+3)}; x \neq \pm 3\right]$

d/ $\left[\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3 : \frac{x^3+4x^2+4x}{3x^2-12x+12}\right] \cdot \frac{x}{3}$ $\left[\frac{x+2}{x-2}; x \neq 0; \pm 2\right]$

e/ $\left[\frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2} : \left(\frac{3}{a-b} + \frac{3a}{a^3-b^3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)\right] \cdot (3a + 3b)$ $\left[a - b; a \neq \pm b; a \neq -\frac{b}{2}\right]$

f/ $\left(\frac{2a}{a+2} + \frac{6a}{6-3a} + \frac{8a}{a^2-4}\right) : \frac{a-4}{a-2}$ $[0; a \neq \pm 2; 4]$

4. Upravte a uveďte, kdy mají dané výrazy smysl

a/ $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 - \frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{b} + 1}$ $[2a; a \neq \pm b; b \neq 0; 1]$

b/ $\frac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)}$ $\left[\frac{a+b}{a-b}; a \neq 0; b \neq 0; a \neq b\right]$

c/ $\left[\frac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3} - \frac{b}{a-b}\right] \cdot \left(\frac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2} - \frac{b}{a}\right)$ $[1; a \neq O; a \neq b]$

d/ $\left[b^2 - \frac{a}{1+\frac{a}{b-a}} \cdot \left(\frac{ab}{b-a} - a\right)\right] : \frac{a^2+ab+b^2}{b}$ $\quad [b-a; a \neq b; b \neq 0]$

e/ $\dfrac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)}{\left(\frac{x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)}$ $\quad [1; x \neq O; y \neq 0; x \neq \pm y]$

f/ $\left[\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right] \cdot \frac{3}{x+y}$ $\quad \left[\frac{9}{x-y}; x \neq \pm y; x \neq -\frac{y}{2}\right]$

3. MOCNINY A ODMOCNINY

1/ Zjednodušte

a/ $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\quad [1]$

b/ $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $\quad [2\sqrt{b}\,]$

c/ $\left(\sqrt{a} + \frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right) : \left(b\sqrt{a} + b\sqrt{ab^2+c}\right)$ $\quad \left[\frac{1}{b}\right]$

d/ $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}\right) : \frac{b+\sqrt{ab}}{b\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$ $\quad [1]$

e/ $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$ $\quad [1]$

f/ $\frac{a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1} + \left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$ $\quad [\sqrt{ab}\,]$

2/ Zjednodušte a výsledek zapište pomocí odmocniny (případně částečně odmocněte)

a/ $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}}a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}$ $\quad [a\sqrt[5]{a^2}]$

b/ $\sqrt{x\sqrt[3]{y^{-1}}} : \sqrt[3]{y^2\sqrt{x^3}} + \sqrt[6]{y} : \mathrm{y}$ $\quad \left[\frac{2}{\sqrt[6]{y^5}}\right]$

c/ $\frac{\sqrt[6]{a^5}\,\sqrt{b}}{a\sqrt[3]{ab}} : \frac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[6]{a^{11}}}$ $\quad \left[\frac{a}{b}\sqrt[12]{ab^5}\right]$

d/ $\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[8]{a^3}}$ $\quad [\sqrt{a}]$

e/ $8a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{y^{-\frac{1}{3}}a\sqrt{y^{\frac{4}{3}}}}\sqrt{a\sqrt[3]{y}}$ $\quad [8\sqrt[3]{a^2y}]$

f/ $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{-1}\sqrt{a}}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$ $\quad [\sqrt[10]{a^9}]$

3/ Zjednodušte a výsledek zapište pomocí mocniny s kladným exponentem

a/ $[(-x)^{-2n} : (-x)^{-2n-1}]^{-2} \cdot [(-x)^{2n+1} \cdot (-x)^{-2n+1}]^{-3}$ $\quad \left[\frac{1}{x^8}\right]$

b/ $\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}}$ $\quad \left[\frac{1}{a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{6}}}\right]$

c/ $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}\,y^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}$ $\left[\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{9}}}\right]$

d/ $\sqrt{\dfrac{a\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a\,\sqrt{b}}}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^3\,\sqrt{b}}{b\,\sqrt[3]{a}}}$ $\left[\dfrac{a^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}}\right]$

4/ Vypočítejte

a/ $\sqrt[5]{\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}} : \sqrt[3]{\dfrac{2}{\sqrt[5]{8}}}$ $[\sqrt[5]{2}]$

b/ $\left[\left(2^2\cdot\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} : \left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$ $\left[\frac{4}{9}\right]$

c/ $\dfrac{2^{14}\cdot 5^5\cdot 15^4\cdot 18^3}{3^{10}\cdot 20^4\cdot 25\cdot 40^3}$ $[1]$

d/ $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2^3\cdot 5}{3\cdot 4^2}\right)^3 : \left(\frac{5^2\cdot 4}{3\cdot 2^2}\right)^2$ $\left[\frac{1}{480}\right]$

e/ $\dfrac{2^6\cdot 3^4\cdot 6^5}{8^3\cdot 9^4} - 6^0\cdot 3\cdot 2^2$ $[0]$

f/ $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \dfrac{\sqrt{2\,\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\,\sqrt[4]{8}}}$ $[8\,\sqrt[4]{8}\,]$

5/ Upravte zlomky

a/ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$ $\left[\dfrac{3\sqrt{10}}{20}\right]$

b/ $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\left[\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right]$

c/ $\dfrac{6+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ $[2\sqrt{3}+2]$

d/ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $\left[\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}\right]$

e/ $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $[3(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$

f/ $\dfrac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ $\left[\dfrac{14-5\sqrt{3}}{11}\right]$

g/ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $[5+2\sqrt{6}\,]$

h/ $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ $[-5+2\sqrt{6}\,]$

4. TEORIE MNOŽIN

1/ Zapište výčtem prvků množiny:

a/ A= $\{x \in N; x^2 < 20\}$ $[A = \{1; 2; 3; 4\}]$

b/ B= $\{x \in Z; |x| \leq 5\}$ $[B = \{-5; -4 \dots \dots 4; 5\}]$

c/ C= $\{x \in N; x < 20 \ \wedge 3/x\}$ $[C = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}]$

d/ D= $\{x \in N; \ x^2 = 2\}$ $[D = \{ \quad \}]$

e/ E= $\{x \in Z; x \ / \ 12\}$ $[E = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}]$

2/ Jsou dána množiny: A= $\{x \in N; x \ / \ 60\}, B = \{x \in N; 7 < x \leq 10\}$

Určete: $A \cap B$ $[\{10\}]$, $A \cup B$ $[\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}]$, $B - A$ $[\{8; 9\}]$

3/ Jsou dány intervaly: $A = \langle -7; 2 \rangle, B = \langle -2; 5), C = \langle 2; \infty)$

Určete: $A \cap B$ $[\langle -2; 2 \rangle]$; $A \cap C$ $[\{2\}]$; $A \cup B$ $[\langle -7; 5)]$

$A - B$ $[\langle -7; -2)]$ $(A \cap B) \cup C$ $[\langle -2; \infty)]$ $(A \cup B) \cap C$ $[\langle 2; 5)]$

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$ $[\langle 2; 5)]$ A' $[(-\infty; -7) \cup (2; \infty)]$

4/ Jsou dány množiny: $A = \{x \in Z; 1 \leq x < 10\}, B = \{x \in Z; \ -3 < x < 6\}, C = \{x \in N; x \leq 9\},$

$D = \{x \in N; x > 0\}, E = \{x \in Z; \ -1 \leq x < 10\}$

Určete množiny: $X = (B \cup E) \cap D$ $[\{x \in N; x \leq 9\}], Y = (A \cap E) - C$ $[\{ \quad \}]$

$Z = (A \cup B) - (C \cap D)$ $[\{-2; -1; 0\}], V = (A \cap D)'_E \ \cup (B \cap C)$ $[\{x \in Z; -1 \leq x \leq 5\}]$

5/ Užitím Vennových diagramů rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí:

a/ $A \cup (B \cap C') = (A \cup B) \cap (A \cup C')$ $[ano]$

b/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $[ano]$

c/ $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)'] = B$ $[ne]$

d/ $A' \cap (B' \cup C) = (A \cup B)' \cap (A' \cup C)$ $[ne]$

6/ Ze 100 žáků se 30 učí německy, 28 španělsky a 42 anglicky. 8 se učí Š i N, 10 se učí Š i A tj. dvojnásobek těch, kteří se učí N i A. Desetina žáků, kteří se učí N, se učí i Š a A.

a/ kolik žáků se učí jen anglicky $[30]$

b/ kolik žáků se učí německy ale ne anglicky $[25]$

c/ kolik žáků neovládá žádný jazyk $[20]$

7/ V anketě odpovídali 102 studenti na 3 otázky. 1. otázku zodpovědělo 36 studentů, 2. otázku 38 studentů, 3. otázku 32 studentů, 1. i 2. otázku 18 studentů, 1. i 3. otázku 12 studentů, 2. i 3. otázku 7 studentů. Na všechny otázky odpovědělo 5 studentů.

a/ kolik studentů odpovědělo pouze na jednu otázku $[47]$

b/ kolik studentů odpovědělo aspoň na dvě otázky $[27]$

5. DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ

Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí:

1/ $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2}{4}\,(n+1)^2$

2/ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n}{3}\,(n+1)(n+2)$

3/ $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots n(n+1)(n+2) = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$

4/ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

5/ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

6/ $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

7/ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

8/ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. LINEÁRNÍ ROVNICE A NEROVNICE

1/ Řešte v Z rovnice

a/ $(2x-3)^2+(3x-4)^2+(4x-5)^2=29x^2-26$ [1]

b/ $(5x-4)^2-(5-3x)^2=(3-4x)^2$ [{ }]

c/ $(x-3)(x+2)-(x+2)(x-4)=7$ [5]

d/ $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$ [2]

2/ Řešte v N rovnice

a/ $\frac{x-2}{3}-\frac{3x+4}{5}+\frac{5x+6}{7}=24-x$ [17]

b/ $\frac{3x-1}{3}-\frac{3x-2}{6}+\frac{x}{2}=x-1$ [{ }]

c/ $\frac{1-\frac{x}{2}}{3}-\frac{2-\frac{x}{4}}{4}+1=0$ [8]

d/ $\frac{5(2x-1)}{4}+x(x-1)+\frac{9(x-1)}{5}=3{,}75+\frac{x(2x-1)}{2}$ [{ }]

3/ Řešte v R rovnice

a/ $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{(x+2)(x+3)}$ [{ }]

b/ $\frac{6}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}+\frac{x^2}{x^2-4}=0$ [8]

c/ $\frac{2x}{x+3}-\frac{2x}{x-3}=\frac{72}{4x^2-36}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

d/ $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$ [{ }]

e/ $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$ [1]

f/ $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x^2-1}$ [{ }]

g/ $\frac{1}{x-2}+x=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ $[R-\{2\}]$

h/ $\frac{3}{3x-1}+\frac{3x+2}{1-9x^2}=\frac{5}{3x+1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

4/ Řešte v N nerovnice

a/ $\frac{3-2x}{5}+8>\frac{5x+2}{2}-x$ $[\{1;2;3\}]$

b/ $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+3}{2}<3-\frac{x-2}{3}$ $[\{1;\ldots;10\}]$

c/ $\frac{7x-1}{3}+6\geq 5x-\frac{5+3x}{2}$ $[\{1;\ldots;7\}]$

d/ $\frac{x-1}{3}-2(1-4x)>\frac{x}{4}-\frac{7-52x}{6}$ [{ }]

5/ Řešte v R nerovnice v součinovém tvaru

a/ $(x-6)(x+2)>0$ $[(-\infty;-2)\cup(6;\infty)]$

b/ $(x+2)(4-x)\leq 0$ $[(-\infty;-2\rangle\cup\langle 4;\infty)]$

c/ $(x^2+2)(x+7)\geq 0$ $[\langle -7;\infty)]$

d/ $(2-x)(x^2-9)\geq 0$ $[(-\infty;-3\rangle\cup\langle 2;3\rangle]$

6/ Řešte v R nerovnice v podílovém stavu

a/ $\frac{1}{2x+5}-\frac{2}{7x+4}\geq 0$ $\left[\left(-\frac{5}{2};-\frac{4}{7}\right)\cup\langle 2;\infty)\right]$

b/ $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{3x-2}$ $\left[(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)\right]$

c/ $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-3}\geq 0$ $[(-2;1\rangle\cup(3;\infty)]$

d/ $\frac{x+1}{x+3}>\frac{x+5}{x+6}$ $[(-\infty;-9)\cup(-6;-3)]$

e/ $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}\geq 0$ $[(-\infty;-1)\cup(1;\infty)]$

f/ $\frac{x-1}{x+1}-\frac{1+x}{1-x}<0$ $[(-1;1)]$

g/ $\frac{5}{x+2}<\frac{10}{x-1}$ $[(-5;-2)\cup(1;\infty)]$

h/ $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{x^2-1}<0$ $[(-2;-1)\cup(1;3)]$

7. KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

1/ Řešte v R rovnice

a/ $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{5}{2}$ $[0;3]$

b/ $\frac{4x+9}{2x-3}=\frac{3x+8}{4-x}$ $[\pm\sqrt{6}]$

c/ $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-6}{x+6}=2\frac{1}{5}$ $[9;\ -42]$

d/ $\frac{2}{1-x}-\frac{7}{x+1}=\frac{3}{x}$ $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{3}{4}\right]$

e/ $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{1}{25-x^2}-\frac{1}{x+5}=0$ $[0;13]$

f/ $(x-2)^2+(x-9)^2=(x-11)^2$ $[\pm 6]$

g/ $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$ $[9;4]$

h/ $\frac{2x-3}{x^3+1}=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{2}{x^2+2x+1}$ $\left[2;\ -\frac{1}{3}\right]$

i/ $\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-3}-\frac{7}{x-1}=0$ $[-3\pm\sqrt{30}]$

j/ $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x-3}$ $\left[7;\ \frac{11}{5}\right]$

k/ $\frac{x-4}{2x-3}=\frac{x+5}{x+4}$ $\left[\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}\right]$

l/ $\frac{18x+7}{x^3-1}=\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}$ $[9;\ -4]$

2/ Zjednodušte dané výrazy a určete, kdy mají smysl

a/ $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$ $\left[\frac{x-4}{x-5}\right]$

b/ $\frac{x^2+9x+14}{x^2-x-12}\cdot\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x-7}$ $\left[\frac{(x+2)(x-5)}{(x-4)(x-1)}\right]$

c/ $\frac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-2y^2}$ $\left[\frac{x-7y}{x+y}\right]$

d/ $\dfrac{\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}-\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}}{\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}-\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}}$ $[1]$

3/ Užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice řešte úlohy:

a/ Sestavte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla 2 a -3 $[k(x^2+x-6)=0; k\in R-\{0\}]$

b/ Rovnice $x^2+px+6=0$ má $x_1=-2$. Určete x_2, p $[x_2=-3; p=5]$

c/ Rovnice $x^2-3x+q=0$ má $x_1=\ -1$. Určete x_2, q $[x_2=4; q=-4]$

d/ Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů rovnice $3x^2-15x+2=0$, aniž tuto rovnici řešíte. $[9x^2-213x+4=0]$

e/ Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou převrácené hodnoty kořenů rovnice $6x^2-13x+6=0$, aniž tuto rovnici řešíte. $[6x^2-13x+6=0]$

f/ V rovnici $2x^2+bx+9=0$ určete b tak, aby pro kořeny této rovnice platilo $x_1=2x_2$ $[b=\pm 9]$

4/ Řešte v R kvadratické nerovnice

a/ $x^2 - 5x + 6 < 0$ $[(2; 3)]$

b/ $-x^2 + 4x - 4 < 0$ $[x \in R - \{2\}]$

c/ $x^2 - 5x - 24 > 0$ $[(-\infty; -3) \cup (8; \infty)]$

d/ $x^2 - 4x + 5 > 0$ $[x \in R]$

e/ $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ $[(-\infty; -2\rangle \cup \langle -1; \infty)]$

f/ $x^2 + 6x + 10 < 0$ $[\{\ \}]$

g/ $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$ $\left[\langle 1; \frac{4}{3}\rangle\right]$

h/ $3x^2 - 7x + 6 < 0$ $[\{\ \}]$

i/ $3x^2 + 8x \leq 0$ $\left[\langle -\frac{8}{3}; 0\rangle\right]$

j/ $2 - x - x^2 \geq 0$ $[\langle -2; 1\rangle]$

k/ $20x - x^2 \geq 36$ $[\langle 2; 18\rangle]$

l/ $-4(3 - x)^2 \geq 11x - 33$ $\left[\langle \frac{1}{4}; 3\rangle\right]$

5/ Řešte nerovnice v daných množinách

a/ $15x^2 + 17x - 42 < 0$ $v\ Z$ $[\{-2; -1; 0; 1\}]$

b/ $3 - 3x + x^2 > 0$ $v\ Z$ $[Z]$

c/ $(x + 1)^2 \leq 0$ $v\ N$ $[\{\ \}]$

d/ $-16x^2 + 32x - 7 \geq 0$ $v\ N$ $[\{1\}]$

8. VÝRAZY, ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

1/ Na základě geometrického významu absolutní hodnoty určete, pro která $x \in R$ platí:

- a/ $|x| > 2$ $[(-\infty; -2) \cup (2; \infty)]$
- b/ $|x| \leq 3$ $[\langle -3; 3 \rangle]$
- c/ $|x| \geq 5$ $[(-\infty; -5\rangle \cup \langle 5; \infty)]$
- d/ $|x| < 0$ $[\{\ \ \}]$
- e/ $|x-2| > 4$ $[(-\infty; -2) \cup (6; \infty)]$
- f/ $|x+1| \leq 3$ $[\langle -4; 2 \rangle]$
- g/ $|x+3| \geq 2$ $[(-\infty; -5\rangle \cup \langle -1; \infty)]$
- h/ $|x-4| < 5$ $[(-1; 9)]$

2/ Řešte v R rovnice

- a/ $x + |x-3| = 5$ $[4]$
- b/ $x + |2-3x| = 4$ $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$
- c/ $|x-3| = 1 - x$ $[\{\ \ \}]$
- d/ $|2x+3| = 4 - x$ $\left[-7; \frac{1}{3}\right]$
- e/ $|x| - |x-1| = 2$ $[\{\ \ \}]$
- f/ $|x+2| + |x-1| = 3$ $[\langle -2; 1 \rangle]$
- g/ $|x-3| + 3|x-1| = 2x + 1$ $\left[\frac{7}{2}; \frac{5}{6}\right]$
- h/ $|x-1| - |x-2| = 1$ $[\langle 2; \infty)]$
- i/ $|x| + 2|x+1| - 3|x-3| = 0$ $\left[\frac{7}{6}\right]$
- j/ $3|x-1| + 2|x-2| = |x+10|$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right]$
- k/ $|x+5| - |x-2| = |x| - x + 7$ $[\langle 2; \infty)]$
- l/ $|x+2| - 2|2x+4| = |3x-1|$ $[\{\ \ \}]$
- m/ $|x^2-4| - |9-x^2| = 5$ $[(-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)]$
- n/ $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{|3x-5|}{2}$ $\left[3; \frac{17}{19}\right]$

3/ Řešte v R nerovnice

- a/ $|2x-8| < 3x - 12$ $[(4; \infty)]$
- b/ $|5x-7| > 10x - 13$ $\left[\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)\right]$
- c/ $\frac{1}{3}|2x-5| + \frac{x}{2} < x - 6$ $[\{\ \ \}]$
- d/ $\frac{2x-1}{4} + |2x-6| \leq \frac{5-x}{2}$ $[\{\ \ \}]$
- e/ $|x| < |x-1|$ $\left[\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\right]$
- f/ $|x+2| \geq |x-2|$ $[\langle 0; \infty)]$
- g/ $|x+5| < |2x-1|$ $\left[\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (6; \infty)\right]$
- h/ $|x| + |2x-1| < x$ $[\{\ \ \}]$
- i/ $|x+2| - 2|2x+4| \leq |3x-1|$ $[R]$
- j/ $|x| < |x-1| - |x+1|$ $[(-\infty; 0)]$

4/ Řešte rovnice a nerovnice v daných množinách

- a/ $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$ v Z $[\{\ \ \}]$
- b/ $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$ v N $[2]$
- c/ $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$ v $\langle$-3;0) $[-2]$
- d/ $x - |2x-1| < |x-2|$ v Z $[Z]$
- e/ $|2x+1| - |3x| > 0$ v $\langle$-3;5) $\left[\left(-\frac{1}{5}; 1\right)\right]$
- f/ $|2x+3| \geq |4x-3|$ v Z $[\{0; 1; 2; 3\}]$

9. ROVNICE A NEROVNICE S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU

Řešte v R rovnice:

1/ $\sqrt{7-x}=x-1$ $[\{3\}]$

2/ $x-\sqrt{x+1}=5$ $[\{8\}]$

3/ $1-\sqrt{1+5x}=x$ $[\{0\}]$

4/ $2\sqrt{x+5}=x+2$ $[\{4\}]$

5/ $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$ $[\{2\}]$

6/ $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$ $[\{5\}]$

7/ $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$ $[\{-1;15\}]$

8/ $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ $[\{-1;3\}]$

9/ $\sqrt{3x-7}-\sqrt{x+1}=2$ $\left[\left\{8+4\sqrt{2}\right\}\right]$

10/ $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$ $[\{-1\}]$

11/ $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3-x}=2$ $[\{2;3\}]$

12/ $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$ $[\{-1;2\}]$

13/ $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ $[\{4\}]$

14/ $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ $[\{-1\}]$

15/ $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$ $[\{2\}]$

16/ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$ $[\{1\}]$

17/ $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$ $\left[\left\{\frac{12}{5};4\right\}\right]$

18/ $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{9-x}$ $[\{0\}]$

19/ $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$ $[\{4\}]$

20/ $\sqrt{x\sqrt{x}-x}+\sqrt{x}=x$ $[\{0;1;4;\}]$

Řešte v R nerovnice:

1/ $\sqrt{4x+4}\geq\sqrt{5x-3}$ $\left[\left\langle\frac{3}{5};7\right\rangle\right]$

2/ $\sqrt{6x-3}\geq\sqrt{2x+1}$ $[\langle 1;\infty)]$

3/ $\sqrt{x+3}<\sqrt{x+5}$ $[\langle -3;\infty)]$

4/ $\sqrt{x-3}\leq\sqrt{6-2x}$ $[\{3\}]$

5/ $\sqrt{x^2-4}>\sqrt{x^2-9}$ $[(-\infty;-3\rangle\cup\langle 3;\infty)]$

6/ $\sqrt{x^2-3x-10}\leq\sqrt{x^2+1}$ $\left[\left\langle-\frac{11}{3};-2\right\rangle\cup\langle 5;\infty)\right]$

7/ $\sqrt{x^2-1}\geq\sqrt{1-x^2}$ $[\{\pm 1\}]$

8/ $\sqrt{x^2+5}\leq 1+x$ $[\langle 2;\infty)]$

9/ $\sqrt{14-x}<x-2$ $[(5;14\rangle]$

10/ $\sqrt{x+2}>x+3$ $[\{\quad\}]$

10. ROVNICE S PARAMETREM

1/ Řešte v R lineární rovnice a parametrem p

a/ $x(p+2)+p(x-2)=x+p$ $\left[pro\ p=-\frac{1}{2}\ je\ P=\{\ \}, pro\ p\neq-\frac{1}{2}\ je\ P=\left\{\frac{3p}{1+2p}\right\}\right]$

b/ $p(x+1)=6(x-1)+2p$ $[p=6\rightarrow P=R; p\neq 6\rightarrow P=\{1\}]$

c/ $p^2(x-1)+x=1-2(px+1)$ $\left[p=-1\rightarrow P=R; p\neq-1\rightarrow P=\left\{\frac{p-1}{p+1}\right\}\right]$

d/ $(x+1)(p+1)=2px$ $\left[p=1\rightarrow P=\{\ \}; p\neq 1\rightarrow P=\left\{\frac{-1-p}{1-p}\right\}\right]$

e/ $x(1-p)+p(1-x)=2x$ $\left[p=-\frac{1}{2}\rightarrow P=\{\ \}; p\neq-\frac{1}{2}\rightarrow P=\left\{\frac{p}{2p+1}\right\}\right]$

f/ $8+p^2x+4x=4p+4px$ $\left[p=2\rightarrow P=R; p\neq 2\rightarrow P=\left\{\frac{4}{p-2}\right\}\right]$

g/ $\frac{2x+p^2}{p+3}+\frac{2x-p^2}{p-3}=\frac{(p^2+4)x}{p^2-9}$ $\left[p=2\rightarrow P=\{\ \}; p\neq 2;\pm3\rightarrow P=\left\{\frac{-6p^2}{(p-2)^2}\right\}\right]$

h/ $\frac{p-x}{p-2}-\frac{x-2}{p+2}=\frac{4p}{p^2-4}$ $\left[p=0\rightarrow P=\{\ \}; p\neq 0;\pm2\rightarrow P=\left\{\frac{p^2-4}{2p}\right\}\right]$

i/ $px-\frac{2}{p^2}=\frac{1}{p}(4x+1)$ $\left[p=2\rightarrow P=\{\ \}; p=-2\rightarrow P=R; p\neq 0;\pm2\rightarrow P=\left\{\frac{1}{p(p-2)}\right\}\right]$

j/ $\frac{4x}{p}+\frac{2}{p^2}=px-\frac{1}{p}$ $\left[p=2\rightarrow P=\{\ \}; p=-2\rightarrow P=R; p\neq 0;\pm2\rightarrow P=\left\{\frac{-1}{p(2-p)}\right\}\right]$

k/ $\frac{px+1}{x-2}=\frac{px-1}{x+2}$ $\left[p=-\frac{1}{2}\rightarrow P=R-\{\pm2\}; p\neq-\frac{1}{2}\rightarrow P=\{0\}\right]$

l/ $\frac{2-p}{p}=\frac{2}{x-1}$ $\left[p=2\rightarrow P=\{\ \}; p\neq 0;2\rightarrow P=\left\{\frac{p+2}{2-p}\right\}\right]$

2/ Řešte v R kvadratické rovnice s parametrem p:

a/ $p^2x^2-x^2+2px+1=0$ $\left[p=1\rightarrow P=\left\{-\frac{1}{2}\right\}; p=-1\rightarrow P=\left\{\frac{1}{2}\right\}; p\neq\pm1\rightarrow P=\left\{\frac{-1}{p-1};\frac{-1}{p+1}\right\}\right]$

b/ $px^2+2px-x+p=0$ $[p=0\rightarrow P=\{0\}; p<\frac{1}{4}\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{1-2p\pm\sqrt{1-4p}}{2p}\right\}; p=\frac{1}{4}\rightarrow P=\{1\};$
$p>\frac{1}{4}\rightarrow P=\{\ \}]$

$c/px^2-3x+p=0$ $[p=0\rightarrow P=\{0\}; p\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{3\pm\sqrt{9-4p^2}}{2p}\right\};$
$p=\frac{3}{2}\rightarrow P=\{1\}; p=-\frac{3}{2}\rightarrow P=\{-1\}; p\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)\rightarrow P=\{\ \}]$

d/ $x^2+(2p-2)x+3p^2+5=0$ $[pro\ všechna\ p\in R\ je\ P=\{\ \}]$

e/ $px^2-6x-3=0$ $[p=0\rightarrow P=\left\{-\frac{1}{2}\right\}; p>-3\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{3\pm\sqrt{9+3p}}{p}\right\};$
$p=-3\rightarrow P=\{-1\}; p<-3\rightarrow P=\{\ \}]$

f/ $px^2+2px+2x+p=0$ $[p=0\rightarrow P=\{0\}; p>-\frac{1}{2}\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{-p-1\pm\sqrt{2p+1}}{p}\right\}$
$p=-\frac{1}{2}\rightarrow P=\{1\}; p<-\frac{1}{2}\rightarrow P=\{\ \}]$

g/ $px^2-2px+p-4=0$ $[p=0\rightarrow P=\{\ \}; p>0\rightarrow P=\left\{\frac{p\pm2\sqrt{p}}{p}\right\}; p<0\rightarrow P=\{\ \}]$

h/ $px^2-x^2-2px-6x+p-3=0$ $[p=1\rightarrow P=\left\{-\frac{1}{4}\right\}; p>-\frac{3}{5}\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{p+3\pm\sqrt{10p+6}}{p-1}\right\}$
$p=-\frac{3}{5}\rightarrow P=\left\{-\frac{3}{2}\right\}; p<-\frac{3}{5}\rightarrow P=\{\ \}]$

i/ $px^2+2px+3x+p+\frac{3}{4}=0$ $[p=0\rightarrow P=\left\{-\frac{1}{4}\right\}; p>-1\wedge p\neq 0\rightarrow P=\left\{\frac{-2p-3\pm3\sqrt{p+1}}{2p}\right\}$
$p=-1\rightarrow P=\left\{\frac{1}{2}\right\}; p<-1\rightarrow P=\{\ \}]$

i/ $x^2+2px-8x+p^2+6p=0$ $[p<\frac{8}{7}\rightarrow P=\left\{4-p\pm\sqrt{16-14p}\right\}; p=\frac{8}{7}\rightarrow P=\left\{\frac{20}{7}\right\};$
$p>\frac{8}{7}\rightarrow P=\{\ \}$

11. ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

1/ Určete reálná čísla x, y tak, aby platilo:

a/ $2x + iy = 4 - 3i$ $[x = 2; y = -3]$

b/ $x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i$ $[x = 3; y = 1]$

c/ $x(y+i) + y(x-i) = 2x + 2yi$ $[x = 0; y = 0 \lor x = 3; y = 1]$

d/ $2x - i(2+i) = 4 - yi$ $\left[x = \frac{3}{2}; y = 2\right]$

f/ $(x+y)(5-4i) + (x-y)(4-5i) = 94 - 68i$ $[x = 9; y = 13]$

2/ Řešte rovnice s neznámou $z \in C$

a/ $(z+i)(z-3i) = z(z-i)$ $[z = -3i]$

b/ $zi = 4 + 2i - z(1-2i)$ $[z = 1 + 3i]$

c/ $4(z-i) = (2-i)^2$ $\left[z = \frac{3}{4}\right]$

d/ $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{i} = \frac{5}{2i-1}$ $[z = -1 - i]$

e/ $2z + 3\bar{z} = 5 + i$ $[z = 1 - i]$

f/ $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = i$ $\left[z = -\frac{2}{3} - i\right]$

g/ $(1-2i)z = (1+2i)\bar{z}$ $[z = k + 2ik, k \in R]$

3/ Řešte v C kvadratické rovnice

a/ $x^2 + 4x + 5 = 0$ $[x_1 = -2 - i;\ x_2 = -2 + i]$

b/ $4x^2 - 8x + 5 = 0$ $\left[x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}i\right]$

c/ $x^2 + 2x + 4 = 0$ $\left[x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}\right]$

d/ $2x^2 + 4x + 5 = 0$ $\left[x_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}i\sqrt{6}\right]$

e/ $4x^2 - 8ix - 5 = 0$ $\left[x_1 = \frac{1}{2} + i;\ x_2 = -\frac{1}{2} + i\right]$

f/ $x^2 - 6ix - 8 = 0$ $[x_1 = 2i;\ x_2 = 4i]$

g/ $x^2 - 2x - 2ix + 2i = 0$ $[x = 1 + i]$

h/ $x^2 + (5i-3)x - 4 - 8i = 0$ $[x_1 = 1 - 3i;\ x_2 = 2 - 2i]$

4/ Řešte v C binomické rovnice

a/ $x^3 - i = 0$ $\left[x_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}; k = 0,1,2\right]$

b/ $x^6 + 64 = 0$ $\left[x_k = 2(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}); k = 0,1, \dots 5\right]$

c/ $x^4 - 1 = 0$ $\left[x_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}; k = 0,1,2\,,3\right]$

d/ $x^8 + 1 = 0$ $\left[x_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{8}; k = 0,1,2\,, \dots 7\right]$

e/ $x^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$ $\left[x_k = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}); k = 0,1,2\,,3,4\right]$

f/ $x^3 + 1 - i = 0$ $\left[x_k = \sqrt[6]{2}\,(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}); k = 0,1,2\right]$

g/ $x^4 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ $\left[x_k = \cos\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4}; k = 0,1,2,3\right]$

12. SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC

1/ Řešte v R^2 soustavy rovnic

a/ $(x+4)(y-2)=(x-5)(y+4)$
$(x+6)(y-1)=(x-1)(y+2)$ $\quad [[8;4]]$

b/ $(x+3)(y+5) = (x+1)(y+8)$
$(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)$ $\quad [[3;1]]$

c/ $(x+1)^2+(y+1)^2+10=x(x+6)+y(y+6)$
$(x+1)^2-(y+1)^2+8 = x(x-6)-y(y-6)$ $\quad [[1;2]]$

2/ Řešte v R^3 soustavy rovnic

a/ $x+y-z=11$
$x-y+z=1$
$y+z-x=5$ $\quad [[6;8;3]]$

b/ $x+2y-3z=-8$
$-3x+y+2z=10$
$2x-3y+2z=5$ $\quad [[3;5;7]]$

c/ $2x-3y+4z=5$
$3x+4y-2z=0$
$-4x+2y+3z=8$ $\quad [[0;1;2]]$

d/ $z= 3x- y+1$
$2z=5{,}6x-2{,}4y+0{,}8$
$3z=10x-2y$ $\quad [\{\ \}]$

e/ $x+y-z=0$
$2x+y-z=1$
$4x+2y-3z=0$ $\quad [[1;1;2]]$

f/ $\frac{x}{5}-\frac{Y}{4}-\frac{z}{10}=0$
$-0{,}2x+0{,}6z=1$
$x-y-z=-1$ $\quad \left[\left[x;\ \frac{2}{3}(x-1);\ \frac{1}{3}(x+5)\right]\right]$

3/ Řešte v R^2 soustavy rovnic

a/ $x^2+y^2=4$
$x+2y=4$ $\quad \left[\left[\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right],[0;2]\right]$

b/ $x^2+y^2=5$
$y-2x=5$ $\quad [[-2;1]]$

c/ $9x^2+16y^2=144$
$x+y=5$ $\quad \left[\left[\frac{16}{5};\frac{9}{5}\right]\right]$

d/ $5x^2+3y^2=192$
$5x-3y=-6$ $\quad \left[[3;7],\left[-\frac{9}{2};-\frac{11}{2}\right]\right]$

e/ $3x^2+2xy-5y^2=0$
$3x+5y-2=0$ $\quad \left[\left[\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]\right]$

f/ $x^2+xy-6y^2=0$
$3x-2y-6=0$ $\quad \left[\left[3;\frac{3}{2}\right],\left[\frac{18}{11};-\frac{6}{11}\right]\right]$

4/ Řešte v N soustavu nerovnic

a/ $\frac{7x-1}{3}+6>5x-\frac{5+3x}{2}$

$\frac{2x-1}{3}-\frac{x+3}{2}<3-\frac{x-2}{3}$ $\quad[\{1;\ldots;6\}]$

b/ $\frac{2x+3}{2}-\frac{x-1}{3}<\frac{7}{6}x$

$\frac{3x-1}{4}-\frac{5-6x}{2}\leq 8+\frac{3}{2}x$ $\quad[4]$

c/ $\frac{5(x-1)}{6}-1>\frac{2(x+1)}{3}$

$3-\frac{x-1}{4}\geq 2+\frac{3(x+1)}{8}$ $\quad[\{\quad\}]$

d/ $\frac{7-x}{2}-3\leq\frac{3+4x}{5}-4$

$\frac{5}{3}x+5(4-x)>2(4-x)$ $\quad[\{3;\ldots;8\}]$

5/ Řešte v R soustavu nerovnic

a/ $4x^2-9<0$

$x-15\geq 0$ $\quad[\{\quad\}]$

b/ $x^2-4<0$

$3x^2+2x-5\geq 0$ $\quad\left[(-2;-\frac{5}{3}\rangle\cup\langle 1;2)\right]$

c/ $x^2-x-6\geq 0$

$x^2-4x<0$ $\quad[\langle 3;4)]$

d/ $x^2-8x+15>0$

$x^2+3x-28<0$ $\quad[(-7;3)]$

e/ $x^2-x-2>0$

$x^2-4x+3>0$ $\quad[(-\infty;-1)\cup(3;\infty)]$

f/ $x^2+x-2<0$

$x^2-7x+12<0$ $\quad[\{\quad\}]$

13. ROVINNÉ ÚTVARY

1/ Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC se protínají v bodě S. Vyjádřete velikost úhlu ASB pomocí úhlu γ (vnitřní úhel při vrcholu C). $\left[|\measuredangle ASB| = 90° + \frac{1}{2}\gamma\right]$

2/ Osy vnějších úhlů trojúhelníku ABC ($|\measuredangle ACB| = 90°$) při vrcholech A, B se protínají v bodě S. Určete velikost konvexního úhlu ASB. $[45°]$

3/ Určete poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku, je-li délka jeho strany $a = 10cm$. $[8{,}5cm]$

4/ Výška a základny lichoběžníku jsou v poměru $2:3:5$, jeho obsah je $512cm^2$. Vypočítejte výšku a délky základen. $[v = 16cm, a = 40cm, c = 24cm]$

5/ Vypočítejte obvod pravidelného sedmiúhelníku, je-li délka jeho nejkratší úhlopříčky $14{,}5cm$. $[o = 56{,}3cm]$

6/ Do kružnice o poloměru $r = 19mm$ je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočítejte obsah kruhové výseče ohraničené stranou šestiúhelníku a kružnicí. $[S = 32{,}7mm^2]$

7/ Rovnostranný trojúhelník má stranu délky a. Jeho vrcholy jsou středy kružnic o poloměrech $\frac{1}{2}a$. Určete obsah obrazce uvnitř trojúhelníku, který je ohraničen těmito kružnicemi. $\left[S = \frac{a^2}{8}\left(2\sqrt{3} - \pi\right)\right]$

8/ Určete obsah lichoběžníku, mají-li jeho základny délky $a = 24cm, c = 14cm$ a ramena $b = 12cm, d = 9cm$. $[S = 167{,}3cm^2]$

9/ Vypočítejte délku a strany čtverce, který má stejný obsah jako rovnoramenný trojúhelník o základně x a rameni y $\left[a = \frac{\sqrt[4]{4x^2y^2 - x^4}}{2}\right]$

10/ V pravidelném osmiúhelníku ABCDEFGH vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku
a/ ABG $[112°30'; 45°; 22°30']$ b/ ACE $[45°; 45°; 90°]$ c/ BEH $[45°; 67°30'; 67°30']$

11/ Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který dostanete, spojíte-li na ciferníku hodinek 1, 5, 8. $[45°; 75°; 60°]$

12/ AB je menší oblouk kružnice, obvodový úhel k němu příslušný má velikost 65°. V bodech A, B jsou sestrojeny tečny kružnice, bod X je jejich průsečík. Určete velikost $\measuredangle AXB$. $[50°]$

13/ Kruhová výseč má obvod $17cm$ a obsah $17{,}5cm^2$. Určete její poloměr a příslušný středový úhel. $[r_1 = 5cm, \alpha_1 = 80°13';\ r_2 = 3{,}5cm, \alpha_2 = 163°42']$

14/ Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S; r), k_2\left(S; \frac{r}{2}\right)$. Vypočítejte obvod a obsah mezikruží se středovým úhlem $\alpha = 120°$. $\left[o = r(\pi + 1); S = \frac{1}{4}\pi r^2\right]$

14. SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

a/ osová souměrnost

1/ Jsou dány dvě různé přímkyp, q a kružnice $k\ (O; r)$. Sestrojte úsečku XY tak, aby $XY \perp q \wedge X \in p$ $\wedge Y \in k \wedge S \in q$, kde S je střed úsečky XY.

2/ Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dáno:

a/ $c = 7cm, v_a = 6{,}5cm, a + b = 12{,}5cm$

b/ $c = 4cm, \alpha = 60°, b - a = 1cm$

3/ Jsou dány přímky a, b, o $(a \parallel o, a \nparallel b)$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, pro které platí: $A \in a, B \in b, t_c \subset o$.

4/ Kružnice $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby $A \in k_1, C \in k_2$ a úhlopříčka BD $(|BD| = 5cm)$ na přímce p. Volte vzájemnou polohu Kružnic k_1, k_2 a přímky p tak, aby úloha měla dvě řešení.

b/ středová souměrnost

1/ Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O, r_1), k_2(O, r_2), r_1 > r_2$ a bod S, $S \in k_2$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

2/ Je dána úsečka $AA_1, |AA_1| = 5cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je $AA_1 = t_a$a pro které platí: a/ $c = 4cm, b = 7cm$ b/ $b = 6cm, \beta = 45°$

3/ Jsou dány kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodech Q, R. Sestrojte trojúhelník RST tak, aby $S \in k_1, T \in k_2$ a bod Q byl středem úsečky ST.

4/ Je dána přímka p, kružnice $k(S, r)$ a body $A_1, B_1, A_1 \notin p, A_1 \notin k, B_1 \notin p, B_1 \notin k$. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby $A \in p, B \in k, A_1$ byl střed BC, B_1 byl střed AC.

c/ posunutí (translace)

1/ Jsou dány přímky $a, b, a \parallel b$ a bod $M, M \notin a, M \notin b$. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M.

2/ Je dána kružnice $k(S, r)$ a úsečka XY. Sestrojte tětivu AB kružnice k tak, aby $AB \parallel XY, |AB| = |XY|$

3/ Je dána kružnice $k_1(S_1, r = 3cm), k_2(S_2, r = 2cm), |S_1S_2| = 7cm$. Sestrojte všechny úsečky *XY*, pro které platí $X \in k_1, Y \in k_2, XY \parallel S_1S_2, |XY| = \frac{1}{2}|S_1S_2|$.

4/ Jsou dány přímky $a, b, a \nparallel b$ a úsečka MN. Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí $A \in a, B \in b$, $AB \parallel MN, |AB| = |MN|$.

d/ otočení (rotace)

1/ Jsou dány přímky $a, b, a \parallel b$ a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in a, B \in b$.

2/ Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, 4cm), k_2(S, 3cm)$a bod $A, |SA| = 2cm$. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby $B \in k_1$, $D \in k_2$.

3/ Jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2), r_1 \neq r_2$, které se protínají v bodech C, Q. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC, tak, aby $A \in k_1, B \in k_2, |\measuredangle ACB| = 120°$.

4/ Je dána kružnice $k(S, 3cm)$ a bod $A, |SA| = 1{,}5cm$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice *k* tak, aby $|XY| = 5{,}5cm, A \in XY$.

15. KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKŮ A ČTYŘÚHELNÍKŮ

1/ Je dána úsečka $AB, |AB| = 6cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí:
a/ $a = 5cm, t_c = 5cm$ b/ $a = 5cm, \gamma = 60°$, c/ $v_c = 5cm, t_c = 5{,}5cm$ d/$\alpha = 45°, v_a = 5{,}5cm$
2/ Je dána úsečka $BC, |BC| = 5cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí:
a/ $b = 6{,}5cm, \beta = 60°$, b/ $\gamma = 60°, t_c = 5{,}5cm$ c/ $v_a = 3cm, t_b = 5cm$, d/ $v_b = 4cm, t_c = 5$cm
3/ Je dána úsečka $AA_0, |AA_0| = 4cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je $AA_0 = v_a$ a pro které platí: a/ $c = 5cm, t_b = 6cm$, b/ $b = 6cm, v_b = 1{,}5cm$ c/$c = 6cm, v_b = 2{,}5cm$
4/ Je dána úsečka $AA_1, |AA_1| = 6cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je $AA_1 = t_a$ a pro které platí: a/ $a = 5cm, \gamma = 60°$, b/ $a = 8cm, v_a = 5cm$, c/ $\beta = 60°, t_b = 4{,}5cm$
5/ Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí: $a = 9cm, v_b = 4{,}5cm, t_a = 2{,}5cm$.
6/ Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí: $\gamma = 75°, v_a = 3{,}5cm, r = 2{,}5cm$ ($r =$ poloměr kružnice opsané)
7/ Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí: $a = 5cm, \alpha = 45°, \rho = 1{,}5cm$ ($\rho =$poloměr kružnice vepsané)
8/ Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, pro který platí $r = 3cm$ (poloměr kružnice opsané)
9/ Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC (AB je základna), pro který platí $v_c = 6cm, t_a = 4{,}5cm$.
10/ Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC ($|\measuredangle C| = 90°$), pro který platí: $a = 4{,}5cm, \rho = 1{,}5cm$ (poloměr kružnice vepsané)
11/ Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno: a/ $v = 3cm, e = 2v$, b/ $f = 4cm, \rho = 1{,}5cm$ (poloměr Kružnice vepsané)
12/ Sestrojte kosodélník $ABCD$, pro který platí:
a/ $a = 4cm, \alpha = 60°, e = 5{,}5cm$ b/ $e = 5cm, f = 3cm$, $\mathrm{v_a} = 2{,}5\mathrm{cm}$
13/ Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), pro který platí:
a/$b = 4cm, v = 3{,}5cm, e = 8cm, f = 7cm$ b/ $b = 4cm, c = 2cm, \alpha = 60°, f = 5cm$
14/ Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí:
a/ $a = 6{,}5cm, \alpha = 60°, \gamma = 90°, \delta = 105°, e = 8cm$
b/ $a = 5cm, c = 3cm, \alpha = 75°, e = 4{,}5cm, f = 5{,}5cm$

16. PODOBNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ – STEJNOLEHLOST

1/ Zobrazte trojúhelník ABC ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$

a/ $S \in AB$; $\kappa = \frac{5}{2}$ b/ $S = A$; $\kappa = -\frac{3}{4}$ c/ S leží vně trojúhelníku ABC; $\kappa = \frac{2}{3}$

2/ K rovnoramennému trojúhelníku sestrojte trojúhelník stejnolehlý, je-li střed stejnolehlosti v těžišti trojúhelníku a $\kappa = -2$.

3/ Kružnici $k\ (O; 2cm)$ zobrazte ve stejnolehlosti $H(S; \kappa)$

a/ S leží vně k; $\kappa = \frac{3}{2}$ b/ S leží uvnitř k; $\kappa = -\frac{5}{4}$

4/ Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 2{,}5cm), k_2(O_2; 1{,}5cm), |O_1O_2| = 6cm$. Určete středy a koeficienty stejnolehlostí, v nichž je obrazem kružnice k_1 kružnice k_2. Sestrojte společné tečny kružnic k_1, k_2.

5/ Je dána kružnice $k(S; 3{,}5cm)$ a bod $M, |SM| = 2cm$. Sestrojte všechny tětivy kružnice k, které procházejí bodem M a jsou tímto bodem děleny v poměru 2 : 5 .

6/ Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, v nichž $|AC|:|BC| = 5:4, \gamma = 60°, v_c = 5cm$.

7/ Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB, M \in BC, N \in AC$.

8/ Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod$M$ $(M \notin a, M \notin b)$. Sestrojte kružnici k, která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b.

17. SHODNOST A PODOBNOST GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

1/ Je dán trojúhelník ABC, těžnice t_c leží na přímce p. Dokažte, že body A, B mají od přímky p stejnou vzdálenost.

2/ Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, bod O je střed základny AB. Bodem O jsou vedeny kolmice k ramenům AC, BC, jejichž paty jsou P, Q. Dokažte, že trojúhelníky AOP a BOQ jsou shodné.

3/ Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, nad stranami AC, AB jsou vně trojúhelníku ABC sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB. Dokažte, že $|BM| = |CN|$.

4/ V trojúhelníku ABC, $|AB| = 12cm, |BC| = 9cm, |AC| = 15cm$ je narýsována příčka $EF, EF \parallel AB$, $|EF| = 4cm$. Vypočtěte vzdálenosti bodů E, F od vrcholu C. $[|EC| = 5cm, |FC| = 3cm]$

5/ Trojúhelník ABC, má obvod 100cm, jemu podobný trojúhelník $A'B'C'$ má strany postupně o 8, 14, 18cm delší než trojúhelník ABC. Vypočtěte délky stran obou trojúhelníků.
$[a = 20cm, b = 35cm, c = 45cm, a' = 28cm, b' = 49cm, c' = 63cm]$

6/ Vrcholem A trojúhelníku ABC je vedena přímka $p \parallel BC$, vrcholem B je vedena přímka $q \parallel AC$, vrcholem C je vedena přímka $r \parallel AB$. Průsečíky přímek p, q, r jsou body P, Q, R. Dokažte, že trojúhelníky PQR a ABC jsou podobné.

7/ Barel o hmotnosti 150kg je třeba valit do výšky 110cm po šikmé desce délky 2,2m. Jaké síly je k tomu zapotřebí. $[750N]$

18/ UŽITÍ PYTHAGOROVY VĚTY A EUKLIDOVÝCH VĚT

1/ Vypočítejte zbývající prvky $(a, b, c, c_a, c_b, v, \alpha, \beta)$ v pravoúhlém trojúhelníku $ABC(|\measuredangle C| = 90°)$, je-li dáno: a/ $c = 10cm, c_a = 7cm\left[c_b = 3cm, v = \sqrt{21}cm, a = \sqrt{70}cm, b = \sqrt{30}cm, \alpha = 56°47', \beta = 33°13'\right]$

b/ $a = 5cm, c_a = 4cm$ $[v = 3cm, c_a = 2{,}25cm, c = 6{,}25cm, b = 3{,}75cm, \alpha = 53°8', \beta = 36°52']$

c/ $b = 5cm, c = 13cm$ $[a = 12cm, c_a = 11{,}1cm, c_b = 1{,}9cm, v = 4{,}6cm, \alpha = 67°23', \beta = 22°37']$

2/ Vypočítejte délky stran v pravoúhlém trojúhelníku ABC, je-li dáno $t_a = 8cm, t_b = 12cm$.
$[a \doteq 11{,}7cm, b \doteq 5{,}5cm, c \doteq 12{,}9cm]$

3/ Je dán obdélník $ABCD, |AB| = 8cm, |CB| = 6cm$. Označte A_1 patu kolmice z bodu A naBD, A_2 patu kolmice z A_1 na AB. Vypočítejte délky úseček: a/ BD $[10cm]$ b/ DA_1 $[3{,}6cm]$ c/ BA_1 $[6{,}4cm]$ d/ AA_1 $[4{,}8cm]$ e/ A_1A_2 $[3{,}84cm]$

4/ Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod M, $|SM| = 9cm$. Z bodu M sestrojte tečny ke kružnici k a body dotyku označte T_1, T_2. Vypočítejte délky úseček: a/ MT_1 $\left[6\sqrt{2}cm\right]$ b/ T_1T_2 $\left[4\sqrt{2}cm\right]$
c/ vzdálenost S od úsečky T_1T_2 $[1cm]$

5/ V kosočtverci je poměr úhlopříček $e: f = 3: 4$ a $S = 150cm^2$. Vypočítejte v, a, e, f.
$[v = 12cm, a = 12{,}5cm, e = 15cm, f = 20cm]$

6/ Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky $a = 22cm, c = 12cm$ a výška je o 1cm menší než délka ramene. $[S = 204cm^2]$

7/ Dvě rovnoběžné tětivy v kružnici o poloměru $6cm$ mají délky $6cm\ a\ 10cm$. Určete jejich vzdálenost.
$[1{,}9cm\ nebo\ 8{,}5cm]$

8/ Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru $r = 10cm$, víte-li, že tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru 2: 3. $\left[8\sqrt{6}cm\right]$

19. a 20. FUNKCE - ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

A/ <u>Lineární funkce</u>

1/Načrtněte graf funkce, určete obor hodnot a vlastnosti:

$f_1: y = -2x$ $[H(f_1) = R, klesající, prostá, lichá]$

$f_2: y = 3$ $[H(f_2) = \{3\}, sudá, omezená, maximum\ i\ minimum\ v\ každém\ bodě]$

$f_3: y = 3x - 4$ $[H(f_3) = R, rostoucí, prostá]$

$f_4: y = 2x - 2,\ x \in (-3; 2\rangle$ $[H(f_4) = (-8; 2\rangle, rostoucí, prostá, omezená, \min v\ b. (-3), \max v\ b. 2]$

$f_5: y = -x + 3,\ x \in (-\infty; 1)$ $[H(f_5) = (2; \infty), kles., prostá, zdola\ omez., \min v\ b. 1\ ]$

$f_6: y = -2x - 1,\ x \in (-1; \infty)$ $[H(f_6) = (-\infty; 1), kles., prostá, shora\ omez., \max v\ b. (-1)\ ]$

2/ Zapište předpisem $y = ax + b$ funkci, pro kterou platí:

a/ $f(3) = 10\ \wedge f(-5) = -14$ $[y = 3x + 1]$

b/ $f(-2) = 5\ \wedge f(1) = -7$ $[y = -4x - 3]$

3/ Sestrojte graf a najděte předpis pro lineární funkci f, jestliže $D(f) = \langle 2; 6\rangle, H(f) = \langle -2; 0\rangle$ a

a/ f je rostoucí v $D(f)$ $\left[y = \frac{1}{2}x - 3\right]$

b/ f je klesající v $D(f)$ $\left[y = -\frac{1}{2}x + 1\right]$

4/ Sestrojte graf funkce a určete její vlastnosti:

a/ $f_1: y = |x| + 3$

b/ $f_2: y = |x - 2| + 3$

c/ $f_3: y = -|x|$

d/ $f_4: y = |1 - x| - 2x$

e/ $f_5: y = |x + 1| + |x + 2|$

f/ $f_6: y = |2x - 4| - |1 + x| - 2$

g/ $f_7: y = 10 - 2|x - 1| - |3x + 6|, x \in \langle -3; 2\rangle$

h/ $f_8: y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$

i/ $f_9: y = |1 - x| - 2|x| + |2 - x|$

j/ $f_{10}: y = |x - 3| - |5 - 2x| + 3|1 - x|$

B/ <u>Kvadratická funkce</u>

1/ Načrtněte graf funkce a určete její vlastnosti. Dále určete souřadnice vrcholu a průsečíků grafu se souřadnicovými osami (pokud existují)

a/ $y = 2x^2 - 6$
b/ $y = -x^2 - 3x$
c/ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$
d/ $y = x^2 + 4x + 3$
e/ $y = x^2 - 6x + 9$
f/ $y = x^2 + x + 1$
g/ $y = 3x^2 + 6x + 3$
h/ $y = -2x^2 + 4x + 1$
i/ $y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$

2/ Načrtněte grafy funkcí

a/ $y = x \cdot |x|$
b/ $y = -2x \cdot |x - 3|$
c/ $y = 2x + |1 - x^2|$
d/ $y = |x^2 - 2x - 2|$
e/ $y = |-x^2 + 4x + 1|$
f/ $y = |x^2 + 2|x| - 3|$

C/ <u>Lineární lomená funkce</u>

Načrtněte graf funkce, určete souřadnice středu, průsečíků s osami, vlastnosti funkce, $D(f), H(f)$

a/ $y = \frac{1}{x}$
b/ $y = -\frac{3}{X}$
c/ $y = \frac{1}{X} + 2$
d/ $y = \frac{1}{x+2}$
e/ $y = \frac{-3}{x+1} - 2$
f/ $y = \frac{1}{x-2} + 1$
g/ $y = \frac{x-1}{x-2}$
h/ $y = \frac{3x-2}{x-1}$
i/ $y = \frac{-2x+3}{x-3}$
k/ $y = \left|\frac{-x+5}{2x-6}\right|$

D/ Mocninné funkce

Načrtněte graf funkce, určete $D(f), H(f)$ a vlastnosti

a/ $y = x^3$ b/ $y = x^3 + 1$ c/ $y = (x+1)^3$ d/ $y = x^4$ e/ $y = x^4 - 2$

f/ $y = (x-2)^4$ g/ $y = \frac{1}{x^2}$ h/ $y = \frac{1}{X^2} - 1$ i/ $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ j/ $y = \frac{1}{x^3}$

E/ Exponenciální funkce

1/ Určete všechny hodnoty parametru q tak, aby daná funkce byla rostoucí

a/ $y = \left(\frac{q+3}{q-1}\right)^x$ $[q \in (1; \infty)]$ b/ $y = \left(\frac{2q+1}{2q-1}\right)^x$ $\left[q \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)\right]$

2/ Určete všechny hodnoty parametru p tak, aby daná funkce byla klesající

a/ $y = \left(\frac{p-1}{3p}\right)^x$ $\left[p \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)\right]$ b/ $y = \left(\frac{2p+1}{2p-1}\right)^x$ $\left[p \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\right]$

3/ Načrtněte graf funkce

a/ $y = 2^x$ b/ $y = 2^x - 4$ c/ $y = 2^{x+1}$ d/ $y = 2^{x+1} - 4$ e/ $y = |2^{x+1} - 4|$

f/ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ g/ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ h/ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ i/ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

F/ Logaritmická funkce

1/ Určete definiční obor funkce

a/ $y = \log_3(x+6)$ $[(-6; \infty)]$ b/ $y = \log(x^2 - 4)$ $[(-\infty; -2) \cup (2; \infty)]$

c/ $y = \log\left(\frac{x}{2x-1}\right)$ $\left[(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)\right]$ d/ $y = \sqrt{\log(x+3)}$ $[\langle -2; \infty)]$

e/ $y = \frac{1}{\log x - 1}$ $[(0; 10) \cup (10; \infty)]$

2/ Načrtněte graf funkce, určete $D(f), H(f)$

a/ $y = \log_2 x$ b/ $y = \log_2(x+4)$ c/ $y = \log_2 x - 1$ d/ $y = \log_2(x+4) - 1$

e/ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ f/ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 2$ g/ $y = |\log_2 x|$ h/ $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1\right|$

3/ Určete všechna $x \in R$, pro která nabývá funkce $y = \log_a \frac{4}{x-3}$, kde $0 < a < 1$, nezáporných hodnot.

$[x \in \langle 7; \infty)]$

21. LOGARITMUS KLADNÉHO ČÍSLA

1/ Vypočítejte

a/ $\log_{\frac{1}{3}} 9$ $[-2]$ b/ $\log_7 \sqrt{7}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$ c/ $\log_{0,25} 4$ $[-1]$

d/ $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$ $[-8]$ e/ $\log_5 1$ $[0]$ f/ $\log_{0,2} 0,04$ $[2]$

2/ Určete všechna $x \in (0;\infty)$, pro něž platí

a/ $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ $[5]$ b/ $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ $[4]$ c/ $\log_2 x = -\frac{1}{3}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$

d/ $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$ e/ $\log x = -\frac{3}{5}$ $\left[\sqrt[5]{0,001}\right]$ f/ $\log_5 x = 0$ $[1]$

3/ Určete všechna $a \in (0;\infty)$ tak, aby platilo

a/ $\log_a 27 = 3$ $[3]$ b/ $\log_a 4 = \frac{1}{4}$ $[256]$ c/ $\log_a \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{1}{27}\right]$

d/ $\log_a 8 = 6$ $[\sqrt{2}]$ e/ $\log_a \sqrt{8} = 3$ $[\sqrt{2}]$ f/ $\log_a \frac{1}{16} = 4$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

4/ Upravte užitím pravidel pro počítání s logaritmy

a/ $x_1 = 2\log 4 + \log 3 - \log 6$ $[x_1 = \log 8]$ b/ $x_2 = \log_6 12 - \log_6 \frac{1}{12} - 2$ $[x_2 = \log_6 4]$

5/ Vypočítejte

a/ $\log_2 \log_2 16$ $[2]$ b/ $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$ $[-1]$

c/ $\log_5 \frac{1}{25} - \left(\log_{\frac{1}{3}} 9\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$ $[-10]$ d/ $3\log_2 \frac{5}{3} - 2\log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{1}{30}$ $[-3]$

e/ $(\log 2)^2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$ $[1]$ f/ $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$ $[8]$

6/ Vypočítejte x

a/ $\log x = 0,5\log a + 3\log b - 2\log c$ $\left[x = \frac{\sqrt{a}\cdot b^3}{c^2}\right]$

b/ $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}\left(\log_{\frac{1}{2}} a + 3\log_{\frac{1}{2}} b\right) - 2 + \log_{\frac{1}{2}} c$ $\left[x = 4\sqrt[4]{ab^3}\cdot c\right]$

7/ Vyjádřete dané výrazy pomocí $\log a, \log b, \log c$

a/ $\log \frac{a^2 b^3}{100\sqrt{c}}$ $\left[2\log a + 3\log b - 2 - \frac{1}{2}\log c\right]$

b/ $\log \sqrt{\frac{10a}{bc}}$ $\left[\frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c + 1)\right]$

c/ $\log \frac{(a+b)^2}{c}$ $[2\log(a+b) - \log c]$

22. EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ ROVNICE

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$

1/ $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ $[\{2\}]$

2/ $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$ $[\{2\}]$

3/ $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$ $[\{-2\}]$

4/ $0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$ $\left[\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right]$

5/ $2 \cdot 0{,}5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$ $\left[\left\{-2; -\frac{2}{3}\right\}\right]$

6/ $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$ $[\{2\}]$

7/ $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$ $[\{2\}]$

8/ $\frac{3^x}{2 \cdot 3^{\sqrt{3}}} = 4{,}5$ $\left[\left\{2+\sqrt{3}\right\}\right]$

9/ $3^x + 3^{x+1} = 108$ $[\{3\}]$

10/ $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$ $[\{-2\}]$

11/ $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$ $[\{2\}]$

12/ $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$ $[\{-1\}]$

13/ $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$ $[\{2\}]$

14/ $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$ $[\{1\}]$

15/ $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$ $[\{3\}]$

16/ $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ $\left[\left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$

17/ $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$ $[\{2\}]$

18/ $3^x = 10$ $[\{2{,}1\}]$

19/ $5^{x+1} = 4$ $[\{-0{,}14\}]$

20/ $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$ $[\{1{,}61\}]$

21/ $4\log_3(2x-1) = 12$ $[\{14\}]$

22/ $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$ $\left[\left\{\frac{1}{8}\right\}\right]$

23/ $\log_2\left[14 + 2\log_7\left(1 + 2\log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = 4$ $\left[\left\{\frac{1}{8}\right\}\right]$

24/ $\log x = 2\log 5 + \log 4$ $[\{100\}]$

25/ $\log\sqrt{x} + \log\frac{1}{x^2} - \log x^3 + \frac{11}{2} = \frac{\log x^2}{1+\log 10}$ $[\{10\}]$

26/ $\frac{\log x}{\log(x-2)} = \frac{\log 9}{\log 3}$ $\left[\left\{-\frac{1}{3}; 40\right\}\right]$

27/ $(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 = 0$ $\left[\left\{2; \frac{1}{8}\right\}\right]$

28/ $4\log_9 x\,(\log_9 x - 1) = 2 + 3\log_9 x$ $\left[\left\{81; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}\right]$

29/ $4\log_3(2x+1) + \log_3\sqrt{2x+1} = \frac{3}{2}\,(\log_3(2x+1))^2 - 6$ $\left[\left\{-\frac{1}{3}; 40\right\}\right]$

30/ $x^{\log x} = 100x$ $[\{0{,}1; 100\}]$

31/ $x^{\log x+2} = 100x$ $[\{0{,}01; 10\}]$

32/ $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_2 x+1} = 2$ $\left[\left\{\frac{1}{4}; 2\right\}\right]$

33/ $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$ $\left[\left\{49; \frac{\sqrt{7}}{7}\right\}\right]$

34/ $\frac{2\log 3x}{\log(2-7x)} = 1$ $\left[\left\{63; -\frac{1}{2}\right\}\right]$

35/ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x+14} = \frac{\log 125}{\log 5}$ $[\{2\}]$

23. GONIOMETRICKÉ FUNKCE – HODNOTY, GRAFY

1/Určete zpaměti:

a/ $\sin\frac{27}{4}\pi$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\sin\frac{35}{6}\pi$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$ $\sin\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\sin\frac{28}{3}\pi$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

$\sin 540°$ $[0]$ $\sin(-1050°)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$ $\sin 630°$ $[-1]$ $\sin(-900°)$ $[0]$ $\sin 675°$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

b/ $\cos\frac{28}{3}\pi$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$ $\cos\left(-\frac{31}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\cos\frac{39}{4}\pi$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$ $\cos\frac{11}{2}\pi$ $[0]$

$\cos(-570°)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\cos 495°$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $\cos 540°$ $[-1]$ $\cos(-810°)$ $[0]$ $\cos 1080°$ $[1]$

c/ $\mathrm{tg}\,\frac{9}{4}\pi$ $[1]$ $\mathrm{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$ $[\sqrt{3}]$ $\mathrm{tg}\,\frac{23}{6}\pi$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ $\mathrm{tg}\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$ $[-1]$

tg 570° $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ tg $(-720°)$ $[0]$ tg 840° $[-\sqrt{3}]$ tg $(-405°)$ $[-1]$

d/ $\mathrm{cotg}\left(-\frac{11}{3}\pi\right)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ $\mathrm{cotg}\,\frac{19}{6}\pi$ $[\sqrt{3}]$ $\mathrm{cotg}\,\frac{19}{4}\pi$ $[-1]$ $\mathrm{cotg}\left(-\frac{23}{2}\pi\right)$ $[0]$

cotg 945° $[1]$ cotg $(-570°)$ $[-\sqrt{3}]$ cotg 540° $[0]$ cotg 660° $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

2/ Načrtněte graf funkce

a/ $y = \sin x; y = \sin 2x;\ y = \sin\frac{1}{2}x; y = 2\sin x; y = -\sin x; y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$y = \sin x - 1; y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right); y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2; y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) + 1; y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$

b/ $y = \cos x; y = \cos 2x; y = \cos\frac{1}{2}x; y = -2\cos x; y = \cos(-x); y = -\cos x + 1; y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \cos(2x - \pi); y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right); y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - 1; y = |1 - \cos x|; y = |\cos x| + 2$

c/ $y = tg\ x; y = tg\ 2x; y = tg\frac{1}{2}x; y = tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right); y = 2\ tg\ x; y = -tg\ x + 2; y = |tg\ x|$

d/ $y = cotg\ x; y = cotg\ 2x; y = cotg\ \frac{1}{2}x; y = cotg\left(x - \frac{\pi}{3}\right); y = cotg\left(2x + \frac{\pi}{2}\right); y = |cotg\ x - 1|$

24. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

1/ Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí v bodě x, víte-li, že platí:

a/ $\cos x = \frac{4}{5} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\sin x = \frac{3}{5};\ tgx = \frac{3}{4}; cotg\ x = \frac{4}{3}\right]$

b/ $\sin x = -\frac{12}{13} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ $\left[\cos x = -\frac{5}{13}; tg\ x = \frac{12}{5}; cotg\ x = \frac{5}{12}\right]$

c/ tg $x = \frac{15}{8} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\sin x = \frac{15}{17};\ \cos x = \frac{8}{17}; cotg\ x = \frac{8}{15}\right]$

d/ cotg $x = -\frac{7}{24} \wedge x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ $\left[\sin x = -\frac{24}{25};\ \cos x = \frac{7}{25}; tgx = -\frac{24}{7}\right]$

2/ Určete definiční obor výrazu a zjednodušte ho:

a/ $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$ $[sin^2 x\ ; x \in R]$

b/ $sin\ x cos^2 x + sin^3 x$ $[\sin x; x \in R]$

c/ $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x cos\ x$ $[1; x \in R]$

d/ $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2$ $[2; x \in R]$

e/ $sin^4 x + 2 sin^2 x cos^2 x + cos^4 x$ $[1; x \in R]$

f/ $sin^4 x - cos^4 x + cos^2 x$ $[sin^2 x; x \in R]$

g/ $\frac{sin^2 x - sin^4 x}{cos^2 x - cos^4 x}$ $\left[1; x \in R - U\left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z\right]$

h/ $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ $\left[\frac{2}{\cos x}; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

i/ $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ $\left[\frac{2}{\sin x}; x \in R - U\{k\pi\}; k \in Z\right]$

j/ $sin^2 x cotg^2 x + sin^2 x - 1$ $[0; x \in R - U\{k\pi\}]$

k/ $cos^2 x tg^2 x + cos^2 x$ $\left[1; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

l/ $\cos x(tg\ x + cotg\ x)$ $\left[\frac{1}{\sin x}; x \in R - U\left\{k\frac{\pi}{2}\right\}; k \in Z\right]$

m/ $(1 + tg^2 x)(1 - sin^2 x) - sin^2 x$ $\left[cos^2 x; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

n/ $tg^2 x - sin^2 x - tg^2 x sin^2 x$ $\left[0; x \in R - U\left\{k\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

o/ $cotg^2 x - cos^2 x - cotg^2 x cos^2 x$ $[0; x \in R - U\{k\pi\}; k \in Z]$

p/ $\frac{tg\ x}{1 + tg^2 x}$ $\left[\sin x cos\ x; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

q/ $\frac{1}{1 + tg\ x} - \frac{cotg\ x}{1 + cotg\ x}$ $\left[0; x \in R - U\left\{k\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

r/ $\frac{1}{1 + cotg\ x} - \frac{tg\ x}{1 + tg\ x}$ $\left[0; x \in R - U\left\{k\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

s/ $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$ $[1; x \in R]$

t/ $\cos 2x + 2 sin^2 x$ $[1; x \in R]$

u/ $cos^2 2x + sin^2 2x$ $[1; x \in R]$

v/ $\frac{sin2x}{cos2x - cos^2 x}$ $[-2 cotg\ x; x \in R - U\{k\pi\}; k \in Z]$

w/ $\frac{cos^4 x - sin^4 x}{cos2x}$ $\left[1; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}; k \in Z\right]$

x/ $\frac{2 sin^2 x - sin2x}{2 cos^2 x - sin2x}$ $\left[-tg\ x; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

y/ $\frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$ $\left[1; x \in R - U\left\{\frac{3}{4}\pi + k\pi\right\}; k \in Z\right]$

z/ $\frac{2 \cos x - cos2x - 1}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$ $\left[\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; x \in R - U\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + 2k\pi\right\}; k \in Z\right]$

3/ Určete, pro která x jsou dané rovnosti definovány a dokažte je:

a/ $cos^4x - sin^4x = cos^2x - sin^2x$

b/ $\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x cos\, x} = 2$

c/ $\frac{cos(-x)}{1-\sin x} = \frac{1-sin(-x)}{\cos x}$

d/ $\frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$

e/ $\frac{1}{tg^2x+1} + \frac{1}{cotg^2x+1} = 1$

f/ $1 - 2sin^2x = \frac{cotg^2x-1}{cotg^2x+1}$

g/ $(cotg\ x + tg\ x)^{-1} = \frac{1}{2}\sin 2x$

h/ $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{sin\ 2x}{1+\cos 2x} = 2tg\ x$

i/ $\frac{\sin 2x}{\cos 2x - cos^2x} = -2cotg\ x$

j/ $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x} = tg\ x$

k/ $\frac{2tg\ x}{1+tg^2x} = sin2x$

l/ $\frac{1+tg\ x}{1-tg\ x} = \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

4/ Dokažte, že platí:

a/ $sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos x$

b/ $cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right) + cos\left(x+\frac{5}{3}\pi\right) = 0$

c/ $sin(x+\pi) + sin(x-\pi) = -2\sin x$

d/ $sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \sin x$

e/ $\sin 3x = 3\sin x - 4sin^3x$

f/ $\cos 3x = 4cos^3x - 3\cos x$

g/ $\sin 75° + \sin 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$

h/ $\sin 75° - \sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5/ Dokažte, že platí:

a/ $1 - 2sin^2\frac{x}{2} = \cos x$

b/ $2cos^2\frac{x}{2} - 1 = \cos x$

c/ $1 + \sin x = \left(sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right)^2$

d/ $1 - \sin x = \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right)^2$

25. SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA, TRIGONOMETRICKÉ ŘEŠENÍ PRAVOÚHLÉHO A OBECNÉHO TROJÚHELNÍKA

1/ Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a/ $a = 10cm; \alpha = 62°; \beta = 34°$ $[b = 6{,}3cm;\ c = 11{,}3cm;\ \gamma = 84°]$

b/ $b = 5cm; \alpha = 110°;\ \beta = 28°$ $[a = 10{,}1cm;\ c = 7{,}1cm;\ \gamma = 42°]$

c/ $a = 6cm; c = 7cm; \gamma = 40°$ $[b = 10{,}4cm;\ \alpha = 33°26';\ \beta = 106°34']$

d/ $b = 6cm; c = 9cm; \beta = 75°$ $[nemá\ řešení]$

e/ $a = 2cm; b = 3cm; c = 4cm$ $[\alpha = 28°57';\ \beta = 46°34';\ \gamma = 104°29']$

f/ $a = 7cm; c = 12cm; \beta = 124°$ $[b = 16{,}9cm;\ \alpha = 20°06';\ \gamma = 36°04']$

g/ $S = 54{,}39cm^2; \gamma = 144°; \alpha = 32°37'$ $[a = 41{,}45cm;\ b = 4{,}47cm;\ c = 43{,}13cm;\ \beta = 3°20']$

h/ $r = 9cm; a = 15cm; \beta = 23°$ $[b = 7{,}03cm; \alpha_1 = 56°27'; \gamma_1 = 100°33'; c_1 = 17{,}7cm;]$

(r- poloměr kružnice opsané) nebo $[b = 7{,}03cm;\ \alpha_2 = 123°33'; \gamma_2 = 33°27'; c_2 = 9{,}92cm]$

2/ Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, znáte-li délky stran $c = 10cm, b = 14cm$, a poměr velikostí dvou úhlů $\beta : \gamma = 2 : 1$. $[\alpha = 43°17';\ \beta = 91°09';\ \gamma = 45°34']$

3/ Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, víte-li,že $b : a = \sqrt{3} : 1, \beta = 2\alpha$.
$[\alpha = 30°;\ \beta = 60°;\ \gamma = 90°]$

4/ V trojúhelníku ABC znáte poměr délek stran $a : b : c = 2 : 4 : 5$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.
$[\alpha = 22°20';\ \beta = 49°27';\ \gamma = 108°13']$

5/ V trojúhelníku ABC znáte velikosti úhlů $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 75°$. Vypočítejte, v jakém poměru jsou délky stran. $\left[a : b : c = 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right]$

6/ V trojúhelníku ABC je $\beta = 15°, \gamma = 33°,\ r = 8cm$. Vypočítejte délky stran.
$[a = 11{,}9cm; b = 4{,}14cm; c = 8{,}71cm]$

7/ Vypočítejte obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru $r = 7{,}5cm$ a jehož dva vnitřní úhly mají velikosti $64°\ a\ 72°30'$. $[o = 38{,}1cm]$

8/ Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a/ $b = 3{,}2cm; c = 7{,}5cm;\ \alpha = 123°40'$ $[S = 9{,}99cm^2]$

b/ $c = 8cm;\ \gamma = 59°;\ \alpha = 34°40'$ $[S = 21{,}19cm^2]$

9/ Obsah trojúhelníku ABC je $64{,}6cm^2, a = 9{,}4cm, \beta = 75°$. Určete délku strany c. $[c = 14{,}2cm]$

10/ V trojúhelníku ABC je $b = 8{,}4cm; c = 6{,}9cm;\ \alpha = 56°$. Určete délku strany a. $[a = 7{,}3cm]$

11/ Vypočítejte poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, ve kterém je $a = 26{,}5cm, \alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$
$[r = 20{,}6cm]$

12/ Letadlo letí ve výšce 2 500m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem 28°, při druhém měření pod výškovým úhlem 50°. Určete vzdálenost, kterou proletělo mezi oběma měřeními. $[2\ 600m]$

13/ Vrchol věže stojící na rovině vidíme z místa A ve výškovém úhlu $\alpha = 39°25'$. Přijdeme-li k její patě o 50m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu $\beta = 58°42'$. Určete výšku věže.
$[82{,}1m]$

14/ Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\varphi = 156°30'$. Rychlost prvního vlaku je $v_1 = 13m \cdot s^{-1}$, rychlost druhého vlaku je $v_2 = 14{,}5m \cdot s^{-1}$. Jak daleko budou od sebe za 5,5 minuty. $[8{,}9km; 1{,}9km]$

15/ Sílu o velikosti $F = 465\ N$ rozložte na dvě složky tak, aby s ní svíraly úhly o velikostech $\alpha = 69°30'$, $\beta = 74°10'$. Vypočítejte velikosti složek. $[F_1 = 755\ N, F_2 = 735\ N]$

16/ Na vodorovné rovině stojí 65m vysoký vodojem a tovární komín. Z vrcholu vodojemu vidíme patu komína v hloubkovém úhlu $\alpha = 10°19'$ a od paty vodojemu vidíme vrchol komína ve výškovém úhlu $\beta = 17°43'$. Určete výšku komína. $[114m]$

17/ Z pozorovatelny 15m vysoké a vzdálené 30m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu $\varphi = 15°$. Vypočítejte šířku řeky. $[43{,}5m]$

18/ Pata C petřínské rozhledny a místa A, B, ze kterých rozhlednu pozorujeme, jsou vrcholy trojúhelníku, ve kterém $|AB| = 80m, |\measuredangle CAB| = 60°, |\measuredangle ABC| = 38°13'$. Určete výšku rozhledny, víte-li, že z místa A je vidět vrchol rozhledny pod výškovým úhlem$\delta = 50°12'$. $[60m]$

19/ Vypočítejte šířku řeky, jestliže ve vzdálenosti 10m od jejího břehu naměřili délku $|AB| = 50m$ rovnoběžně s břehem, a jestliže bod C na druhém břehu řeky je vidět z bodu A po úhlem $\alpha = 32°30'$ a z bodu B pod úhlem $\beta = 42°15'$. $[8{,}72m]$

20/ Ze dvou míst M, N na vodorovné rovině vzdálených od sebe 3,1km byl pozorován mrak nad spojnicí obou míst ve svislé rovině ve výškových úhlech $\alpha = 78°40', \beta = 63°50'$. Jak vysoko byl mrak? $[4{,}5km]$

26. GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

1/ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi;\ \frac{7}{4}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
2/ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
3/ $tg\ x = \sqrt{3}$	$\left[\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in Z\right]$
4/ $cotg\ x = -\sqrt{3}$	$\left[\frac{5}{6}\pi + k\pi; k \in Z\right]$
5/ $\sin 3x = 1$	$\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi; k \in Z\right]$
6/ $sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right]$
7/ $cos\left(3x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$	$\left[\frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi;\ \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi; k \in Z\right]$
8/ $tg(4x - 3) = 1$	$\left[\frac{3}{4} + \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}; k \in Z\right]$
9/ $cotg\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left[\frac{5}{6}\pi + k\pi; k \in Z\right]$
10/ $2cos^2x - \cos x - 1 = 0$	$\left[2k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
11/ $2cos^2x - 3 = 3sinx$	$\left[\frac{7}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi;\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
12/ $12sin^4x + sin^2x - 1 = 0$	$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{5}{6}\pi + k\pi; k \in Z\right]$
13/ $tg^2x - tg\ x - 2 = 0$	$\left[\frac{3}{4}\pi + k\pi; 1{,}1 + k\pi; k \in Z\right]$
14/ $tg\ x + cotg\ x - 2 = 0$	$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z\right]$
15/ $4sin^2x - tg^2x = 1$	$\left[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right]$
16/ $4cos^3x = cosx$	$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{3} + k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + k\pi; k \in Z\right]$
17/ $3sin^2x = sin2x\ cosx$	$\left[k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
18/ $2cos^2x = cotg\ x$	$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z\right]$
19/ $sin^4x - cos^4x = \frac{1}{2}$	$\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
20/ $\frac{1+\sin x}{\cos x} = cotx\ x$	$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
21/ $\sqrt{3}sinx + cosx = 2$	$\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in Z\right]$
22/ $sinx + cosx = 1$	$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 2k\pi; k \in Z\right]$
23/ $cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left[\frac{4}{3}\pi + 2k\pi;\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
24/ $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi; k \in Z\right]$
25/ $cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$	$\left[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right]$

27. POLOHOVÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

1/ Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze

a/ přímek: AS_{GH}, DS_{AB} $[mimoběž.]$; $AS_{CH}, S_{AE}S_{GH}$ $[\parallel]$; BS_{CG}, AS_{CH} $[\nparallel]$; EC, AS_{GH} $[mimoběž.]$

b/ přímky a roviny: EC, ABH $[\nparallel]$; BF, ECG $[\parallel]$; FH, BDH $[\subset]$; AG, BHS_{AB} $[\subset]$

c/ rovin: BFS_{AC}, HFS_{EH} $[\nparallel]$; AFH, BDG $[\parallel]$; EFG, BCS_{AE} $[\nparallel]$; $ABS_{DH}, S_{AB}S_{CG}S_{CH}$ $[=]$

2/ Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$, $|AB| = |BC|, |AE| = 2|AB|$. Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran AE, BF, CG, DH. Rozhodněte o vzájemné poloze, případně určete průsečík (průsečnici)

a/ přímek: EC, AK $[\nparallel, E]$; AL, NG $[\parallel]$; AH, FC $[mimoběž.]$; EM, KC $[\parallel]$; KM, AF $[mimoběž.]$

b/ přímky a roviny: KM, NLC $[\nparallel, S_{NL}]$; EF, MNB $[\parallel]$; KG, ACE $[\subset]$; BN, KLE $[\nparallel, B]$;
EC, BCH $[\subset]$

c/ rovin: KCL, AEG $[\nparallel, KC]$; ABM, KGH $[\parallel]$; FGH, BLK $[\nparallel, EF]$

3/ Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a/ ACS_{GH}

b/ $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$

c/ $S_{AD}S_{AB}S_{CG}$

d/ $S_{AE}S_{AB}S_{EG}$

e/ $KLM, K \in AB, |BK| = 3|AK|, L = S_{GH}, M \in EH, |HM| = 3|EM|$

f/ $RST, R \in BF, |BR| = 3|FB|, S = S_{AD}, T \in CG, |GT| = 3|CT|$

g/ $XYZ, X \in\leftrightarrow AB, S_{XB} = A, Y = S_{EH}, Z \in CD, |DZ| = 3|CZ|$

h/ $UVW, U \in\leftrightarrow AE, S_{UE} = A, V \in EF, |EV| = 3|FV|, W \in BC, |BW| = \frac{4}{3}|BC|$

28. METRICKÉ VLASTNOSTI LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU

1/ Je dána krychle $ABCDEFGH, |AB| = 4cm$. Vypočítejte odchylku přímek:
a/ AC, EC $[35°16']$ b/ AG, BH $[70°32']$ c/ AF, CH $[90°]$ d/ AE, BH $[54°44']$

2/ Je dán kvádr $ABCDEFGH, |AB| = 6cm, |BC| = 3cm, |AE| = 8cm$, S je střed horní stěny, M je střed AE, N je střed BF. Určete odchylku přímek:
a/ BE, CG $[36°52']$ b/ EG, BD $[53°08']$ c/ AE, BS $[22°45']$
d/ BM, NG $[63°40']$ e/ AC, BH $[67°19']$ f/ AC, BS $[76°35']$

3/ Podstavou kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnoramenný trojúhelník ABC, $|AB| = 3cm, |AC| = |BC| = 4cm, |AA'| = 4cm$. Určete odchylku přímek:
a/ BA', BC' $[43°33']$ b/ $A'B', BC$ $[67°58']$ c/ AB', BC $[77°]$

4/ Je dán kvádr $ABCDEFGH, |AB| = 5cm, |BC| = 8cm, |AE| = 12cm$. Určete odchylku přímky od roviny:
a/ AF, ABC $[67°20']$ b/ EC, ABF $[31°36']$ c/ DG, AEH $[22°37']$

5/ Je dán kvádr $ABCDEFGH, |AB| = 4{,}5cm, |BC| = 3cm, |AE| = 3{,}8cm$, S je střed EG. Určete odchylku přímky BS od roviny: a/ ABF $[18°49']$ b/ BCG $[28°45']$

6/ Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete odchylku přímky BV a roviny ABC, je-li:
a/ $|\sphericalangle BV, BA| = 75°$ $[68°32']$ b/ $a = 15cm, S_{\Delta AVC} = 127{,}5cm^2$ $[48°35']$

7/ Je dán kvádr $ABCDEFGH, |AB| = 5cm, |BC| = 8cm, |AE| = 12cm$. Určete odchylku rovin:
a/ HDG, EFC $[33°41']$ b/ ECG, BDH $[64°02']$ c/ ABG, DEF $[67°20']$

8/ Je dána krychle $ABCDEFGH, |AB| = 5cm$. Určete odchylku rovin:
a/ ABC, BDG $[54°44']$ b/ $ABC, MNG, M je\ střed\ BC, N\ je\ středCD$ $[70°24']$

9/ Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4cm, v = 6cm$. Určete odchylku rovin:
a/ ABC, ADV $[71°34']$ b/ ADV, BCV $[36°52']$

10/ Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH, |AB| = 4cm, |AE| = 5{,}5cm$. Určete vzdálenost bodu B od přímky: a/ AC $[2{,}82cm]$ b/ GH $[6{,}8cm]$ c/ AG $[3{,}45cm]$
d/ EG $[6{,}18cm]$ e/ $CM, M\ je\ střed\ EH$ $[3{,}84cm]$

11/ Je dán kvádr $ABCDEFGH, |AB| = 5cm, |BC| = 8cm, |AE| = 12cm$. Vypočítejte vzdálenost bodu od přímky: a/ B, FC $[6{,}7cm]$ b/ D, HC $[4{,}6cm]$ c/ G, HF $[4{,}2cm]$

29. OBJEM A POVRCH TĚLESA

1/ Určete objem a povrch kvádru, jehož tělesová úhlopříčka má délku u a jehož stěny, které procházejí týmž vrcholem, mají obsahy v poměru 1 : 2 : 3. $\left[V = \frac{36}{343}u^3; S = \frac{72}{49}u^2\right]$

2/ Úhlopříčný řez kvádru kolmý k rovině podstavy je čtverec s obsahem 4 225cm^2. Jedna podstavná hrana je o 23cm delší než druhá. Určete objem a povrch. $[V = 120\ 120cm^3; S = 15\ 266cm^2]$

3/ Podstavou kvádru je obdélník vepsaný do kruhu s poloměrem $r = 8cm$, kratší straně obdélníku přísluší středový úhel o velikosti 68°40′. Určete objem, je-li obsah pláště 120cm^2. $[V = 322cm^3]$

4/ Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru $a : b : c = 2 : 4 : 5, S = 57cm^2$. Vypočítejte objem. $\left[V = 15\sqrt{3}cm^3\right]$

5/ Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku $a = 10cm$ a úhel při základně má velikost $\alpha = 40°20'$. Vypočítejte objem, je-li obsah pláště roven součtu obsahů podstav. $[V = 39cm^3]$

6/ Prodlouží-li se hrana krychle o 5cm, zvětší se její objem o 485cm^3. Určete povrch původní a zvětšené krychle. $[S_1 = 54cm^2;\ S_2 = 384cm^2]$

7/ Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 3cm a boční hrana 6cm. $[V = 40{,}5cm^3; S = 75{,}7cm^2]$

8/ Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li obsah podstavy 20cm^2 a odchylka boční stěny od roviny podstavy je 60°. $[V = 25{,}8cm^3; S = 60cm^2]$

9/ Délka každé hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu je 36cm. Určete objem a povrch. $[V = 11dm^3; S = 35dm^2]$

10/ Cheopsova pyramida je 145m vysoká, podstavou je čtverec o straně délky232,7m. Jak vysoká by byla zeď tloušťky 60cm, vystavěna ze zdiva pyramidy kolem ČR, měří-li hranice ČR 2 303km. $[1{,}9m]$

11/ Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6$cm\ a\ 4cm$. Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel 60°. Vypočítejte objem a povrch. $[V = 62cm^3; S = 105cm^2]$

12/ Dva rotační válce mají výšky $64cm\ a\ 27cm$. Plášť každého z nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy obou válců. $[4 : 3]$

13/ Osový řez nádoby tvaru rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou $u = 39cm$. Poměr obsahu pláště a obsahu podstavy je 5 : 3. Kolik litrů vody se vejde do nádoby. $[15{,}3l]$

14/ Kolik vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu s průměrem 16cm, teče-li voda rychlostí 2,5 $m \cdot s^{-1}$. $[1\ 800hl]$

15/ Určete rozměry rovnostranného válce o objemu $1l$. $[r \doteq 5{,}4cm; v \doteq 10{,}8cm]$

16/ Vypočítejte objem a povrch rotačního kužele o výšce 10cm, jehož strana má od roviny podstavy odchylku 30°. $[V \doteq 3\ 140cm^3; S \doteq 2\ 030cm^2]$

17/ Vypočítejte kolik m^3 písku je v hromadě tvaru rotačního kužele s výškou 3,3 m a obvodem podstavy 18,85m. $[31{,}1m^3]$

18/ Vypočítejte obsah lampového stínítka tvaru komolého kužele s průměry podstav $32cm\ a\ 12cm$ a výškou 24cm. $[S = 1\ 797cm^2]$

19/ Do koule je provrtán otvor tvaru rovnostranného válce. Určete kolik % objemu koule činí vyvrtaný materiál. [53 %]

2O/ Z jaké výšky může kosmonaut v každém okamžiku vidět 1 % povrchu Země. $[130km]$

21/ Vypočítejte objem a povrch kulové výseče, má-li kulová úseč, která je části výseče poloměr podstavy $r_1 = 6cm$ a výšku $v = 2cm$. $[V = 419\ cm^3; S = 314cm^2]$

22/ Nádoba tvaru polokoule je zcela naplněna vodou. Nakloníme-li ji o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ vyteče z ní 11l vody. Kolik litrů vody v ní zůstane. $[5l]$

30. VEKTORY V ROVINĚ A V PROSTORU

1/ Určete čísla r, s tak, aby platilo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

a/ $A[5;-2], B[1;r], \vec{u}=(s;-3)$ $[r=-5; s=-4]$

b/ $A[2r-3;6], B[4-r;3], \vec{u}=(-5;s)$ $[r=4; s=-3]$

2/ V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body A, B, C. Určete souřadnice bodu D tak, aby orientované úsečky $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ byly umístěním téhož vektoru.

a/ $A[-2;1], B[2;-5], C[4;3]$ $[D[8;-3]]$

b/ $A[1;-2;3], B[0;3;5], C[-4;1;-7]$ $[D[-5;6;-5]]$

3/ Je dán trojúhelník ABC, T je jeho těžiště

a/ vyjádřete vektor $T-A$ jako lineární kombinaci vektorů $B-A$ a $C-A$

$\left[T-A=\frac{1}{3}(B-A)+\frac{1}{3}(C-A)\right]$

b/ vypočítejte souřadnice těžiště, je-li $A[3;2;-1], B[1;-4;0], C[-1;2;6]$ $\left[T\left[1;0;\frac{5}{3}\right]\right]$

4/ Určete neznámou souřadnici vektoru $\vec{u}$ tak, aby byl lineární kombinací vektorů $\vec{v}, \vec{w}$

a/ $\vec{u}=(3;u_2;5), \vec{v}=(4;-1;0), \vec{w}=(3;2;1)$ $[u_2=13]$

b/ $\vec{u}=(u_1;8;2), \vec{v}=(1;2;1), \vec{w}=(2;12;5)$ $[u_1=-4]$

5/ Určete neznámé souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby tyto vektory byly rovnoběžné:

a/ $\vec{u}=(u_1;2;6), \vec{v}=(1;v_2;-2)$ $\left[u_1=-3; v_2=-\frac{2}{3}\right]$

b/ $\vec{u}=(-6;u_2;-9), \vec{v}=(8;2;v_3)$ $\left[u_2=-\frac{3}{2};\ v_3=12\right]$

6/ Určete neznámé souřadnice bodu A tak, aby body A, B, C ležely na jedné přímce:

a/ $A[a_1;-1;a_3], B[1;-3;0], C[-1;-7;2]$ $[a_1=2;\ a_3=-1]$

b/ $A[1;a_2;a_3], B[3;-4;-1], C[-3;-1;8]$ $[a_2=-3; a_3=2]$

7/ Jsou dány body $A[3;2;1], B[1;-3;0], C[0;2;5]$. Určete skalární součin vektorů $\vec{u}\cdot\vec{v}$, kde $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{AC}$ $[\vec{u}\cdot\vec{v}=2]$

8/ Určete neznámé souřadnice vektoru $\vec{u}$ tak, aby $\vec{u}\perp\vec{v}$:

a/ $\vec{u}=(u_1;6), \vec{v}=(-2;1)$ $[u_1=3]$

b/ $\vec{u}=(-3;u_2), \vec{v}=(5;-6)$ $[u_2=-2{,}5]$

9/ Jsou dány vektory $\vec{a}=(2;-1;-1), \vec{b}=(3;2;1), \vec{c}=(1;-3;2)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{u}$, pro který Platí $\vec{a}\cdot\vec{u}=2, \vec{b}\cdot\vec{u}=7, \vec{c}\cdot\vec{u}=-1$ $[\vec{u}=(2;-1;3)]$

10/ Vypočítejte délky stran a velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, je-li:

a/ $A[1;2;-3], B[-3;3;-2], C[-1;1;-1]$ $[c=3\sqrt{2}; a=b=3;\ \alpha=\beta=45°; \gamma=90°]$

b/ $A[-1;-3;0], B[-1;2;5], C[-6;2;5]$ $[a=5; b=5\sqrt{3}; c=5\sqrt{2};\ \alpha=35°16'; \beta=90°; \gamma=54°44']$

11/ Jsou dány body$A[20;-5;10], B[8;4;-10], C[-4;13;-10], D[8;4;10]$. Dokažte, že ABCD je rovnoběžník.

12/ Vypočítejte odchylku přímkyAB od souřadnicových os x, y, z $A[-5;-3;8], B[7;6;-12]$.
$[61°19', 68°54', 36°52']$

13/ Určete souřadnice všech vektorů $\vec{u}$, které jsou kolmé k vektoru $\vec{v}=(3;4)$ a pro které platí $|\vec{u}|=15$
$[\vec{u}=(-12;9); \vec{u}'=(12;-9)]$

31. ANALYTICKÁ GEOMETRIE NA PŘÍMCE A V ROVINĚ

1/ Napište parametrické vyjádření a obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[3; -1]$ a je:

a/ rovnoběžná s přímkou $q: 2x + 3y + 7 = 0$ $[x = 3 - 3t, y = -1 + 2t \wedge t \in R; 2x + 3y - 3 = 0]$

b/ kolmá k přímce $r: x - 2y + 4 = 0$ $[x = 3 + t, y = -1 - 2t \wedge t \in R; 2x + y - 5 = 0]$

c/ rovnoběžná s osou x $[x = 3 + t, y = -1 \wedge t \in R; y + 1 = 0]$

2/ Určete směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0; 2], B[-2; 4]$ $[k = -1;\ \varphi = 135°]$

3/ Je dán trojúhelník $ABC, A[1; 4], B[3; -2], C[-4; -6]$. Určete parametrické vyjádření přímky, ne které leží: a/ strana c $[x = 1 + t; y = 4 - 3t \wedge t \in R]$

b/ výška v_c $[x = -4 + 3k, y = -6 + k \wedge k \in R]$

c/ těžnice t_c $[x = 2 + 6l, y = 1 + 7l \wedge l \in R]$

d/ osa strany AB $[x = 2 + 3s, y = 1 + s \wedge s \in R]$

4/ Je dán trojúhelník $ABC, A[2; 4], B[4; 2], C[4; 1]$

a/ napište obecné rovnice os stran a určete souřadnice jejich průsečíku

$\left[o_{AB}: x - y = 0;\ o_{BC}: 2y - 3 = 0;\ o_{AC}: 4x - 6y + 3 = 0; S\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]\right]$

b/ napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice a určete souřadnice těžiště

$\left[t_a: 5x + 4y - 26 = 0;\ t_b: x + 2y - 8 = 0;\ t_c: 2x + y - 9 = 0; T\left[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right]\right]$

c/ napište obecné rovnice přímek, na nichž leží výšky a určete souřadnice jejich průsečíku (ortocentra)

$[v_a: y - 4 = 0;\ v_b: 2x - 3y - 2 = 0;\ v_c: x - y - 3 = 0; V[7; 4]]$

5/ Napište rovnici přímky $AB, A[5; -2], B[2; -3]$ v úsekovém tvaru. Vypočítejte souřadnice průsečíků této přímky se souřadnicovými osami a určete obsah trojúhelníku omezeného přímkou *AB* a osami *x, y.*

$\left[\frac{x}{11} - \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1;\ P_x[11; 0];\ P_y\left[0; -\frac{11}{3}\right];\ S_\Delta = \frac{121}{6}\right]$

6/ Jsou dány body $A[-2; 5], B[4; -1]$. Napište parametrické vyjádření:

a/ úsečky AB $[x = -2 + t, y = 5 - t; t \in \langle 0; 6\rangle]$

b/ polopřímky AB $[x = -2 + k, y = 5 - k; k \in \langle 0; \infty)]$

c/ polopřímky BA $[x = -2 + l, y = 5 - l; l \in (-\infty; 6\rangle]$

7/ Určete souřadnice průsečíku přímek p, q:

a/ $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, t \in R; q: x = 1 + 4k, y = 5 - 2k, k \in R$ $\left[P\left[-2; \frac{13}{2}\right]\right]$

b/ $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, t \in R; q: 2x + y - 1 = 0$ $[P[-5; 11]]$

c/ $p: 2x + y - 1 = 0; q: x - 2y - 8 = 0$ $[P[2; -3]]$

d/ $p = \overleftrightarrow{AB}, A[-1;\ -2], B[-1; 1]; q = \overleftrightarrow{CD}, C[1; 1], D[2; 3]$ $[P[-1;\ -3]]$

8/ Body$A[1; 2], B[-2; 3], C[-3;\ -1]$ určují trojúhelník ABC. Jeho vrcholy veďte rovnoběžky s protějšími stranami. Dostanete tak trojúhelník $A_1B_1C_1$. Určete souřadnice jeho vrcholů.

$[A_1[-6; 0],\ B_1[0;\ -2], C_1[2; 6]]$

9/ V trojúhelníku $ABC\ je\ A[-10; 2], B[6; 4]$ a průsečík výšek $V[5; 2]$. Určete souřadnice bodu *C.* [*C* [6; -6]]

10/ Určete vrcholy *A, B* trojúhelníku *ABC,* je-li $C[4;\ -1], v_b: 2x - 3y + 12 = 0, t_b: 2x + 3y = 0$

$[A[8;\ -7], B[-3; 2]]$

11/ Určete obecnou rovnici přímek, které procházejí bodem $A[2; 3]$ a mají od bodu $B[0;\ -1]$ vzdálenost $v = 4.$ $[p_1: y - 3 = 0;\ p_2: 4x + 3y - 17 = 0]$

12/ Napište rovnici přímky, která prochází bodem $P[3; 5]$ a má stejnou vzdálenost od bodů $A[-7; 3], B[11;\ -15]$ $[p_1: 11x - y - 28 = 0;\ p_2: x + y - 8 = 0]$

13/ Napište středovou rovnici kružnice, která prochází body $A[3; 2], B[1; -4]$ a jejíž střed leží na přímce $p: x - y + 9 = 0$ $[k: (x+7)^2 + (y-2)^2 = 100]$

14/ Napište středovou rovnici kružnice opsané trojúhelníku $ABC, A[-5; 0], B[2; -1], C[1; 2]$ $\left[k: \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}\right]$

15/ Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou *x,* střed má souřadnice $S[2; 1]$, hlavní Poloosa je 2x delší než vedlejší poloosa a elipsa prochází bodem $O[0; 0]$. $\left[e: \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1\right]$

16/ Napište rovnici elipsy, která prochází body $M[2; 3], N[-1; -4]$ a má své osy na souřadnicových osách. $[e: 7x^2 + 3y^2 = 55]$

17/ Určete ohniska hyperboly s rovnicí $10x^2 - 5y^2 = 50$. Napište rovnici hyperboly, která má stejné asymptoty jako daná hyperbola, ale prochází bodem $M[10; 0]$ $\left[E\left[\sqrt{15}; 0\right], F\left[-\sqrt{15}; 0\right]; 2x^2 - y^2 = 200\right]$

18/ Napište rovnici hyperboly, která má střed $S[-5; 4]$ prochází body $M[5; 7], N[12; 11{,}5]$ $\left[h: \frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{16} = 1\right]$

19/ Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[3; -7]$, prochází bodem $M[4; -5]$ a jejíž osa je rovnoběžná

a/ s osou x $[(y+7)^2 = 4(x-3)]$ b/ s osou y $\left[(x-3)^2 = \frac{1}{2}(y+7)\right]$

20/ Určete vzájemnou polohu kuželosečky a přímky. Pokud existují společné body, určete jejich souřadnice

a/ $x^2 + y^2 = 25; p: 3x - y - 5 = 0$ $[sečna; A[0; -5], B[3; 4]]$

b/ $y^2 = 4x; p: x - 2y + 4 = 0$ $[tečna; T[4; 4]]$

c/ $9x^2 + 25y^2 = 225; p: 4x + 5y - 26 = 0$ $[vnější\ přímka]$

d/ $4x^2 - y^2 = 64; p: 2x + 3y - 8 = 0$ $[sečna\ ; A[4; 0], B[-5; 6]]$

21/ Napište rovnici tečny ke kuželosečce v bodě *T:*

a/ $x^2 - 2x - 4y - 23 = 0; T[7; y_0]$ $[t: 3x - y - 18 = 0]$

b/ $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0; T\left[8; -\frac{1}{4}\right]$ $[t: 5x + 4y - 39 = 0]$

22/ Určete *d* v rovnici přímky *p* tak, aby byla tečnou dané kuželosečky:

a/ $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0; p: x + 4y + d = 0$ $[d = -8]$

b/ $x^2 - 4y^2 = 36; p: x - y + d = 0$ $[d = \pm 3\sqrt{3}]$

23/ Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou rovnoběžné s přímkou *p:*

a/ $x^2 + 9y^2 = 5; p: 2x - 3y = 0$ $[t_1: 2x - 3y + 5 = 0;\ t_2: 2x - 3y - 5 = 0]$

b/ $4x^2 - y^2 - 8x + 1 = 0; p: 4x - y + 3 = 0$ $[t_1: 4x - y - 1 = 0;\ t_2: 4x - y - 7 = 0]$

24/ Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou kolmé k přímce *q:*

a/ $x^2 + y^2 - x - 2y = 0; q: 2x - y + 6 = 0$ $[t_1: x + 2y = 0;\ t_2: x + 2y - 5 = 0]$

b/ $2x^2 + y - 4 = 0; q: x - 7 = 0$ $[t: y = 4]$

25/ Napište rovnice tečen z bodu M k dané kuželosečce:

a/ $M[0; 0];\ x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$ $[t_1: x + y = 0;\ t_2: x - 5y = 0]$

b/ $M[0; -1];\ (x-2)^2 + y^2 = 1$ $[t_1: y + 1 = 0;\ t_2: 4x - 3y - 3 = 0]$

c/ $M[-3; 0]; x^2 + y^2 - 2y = 0$ $[t_1: y = 0;\ t_2: 3x - 4y + 9 = 0]$

d/ $M[1; -1];\ y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ $[t_1: x + y = 0;\ t_2: x - y - 2 = 0]$

32. ARITMETICKÁ A GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

1/ Rozhodněte, které posloupnosti jsou rostoucí případně klesající, své tvrzení dokažte.

a/ $(-2n+3)_{n=1}^{\infty}$ [kles.] b/ $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$ [ani rost. ani kles.]

c/ $\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ [rost.] d/ $(n^2+2n+4)_{n=1}^{\infty}$ [rost.]

2/ Rozhodněte, které posloupnosti jsou omezené shora, zdola, omezené, a dokažte.

a/ $(n^2-1)_{n=1}^{\infty}$ [zdola omez.] b/ $\left(\frac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [omez.]

c/ $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ [omez.] d/ $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ [shora omez.]

3/ Rozhodněte, které posloupnosti jsou aritmetické (určete *d)*, a které jsou geometrické (určete *q)*.

a/ $\left(\frac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[a.p.; d=\frac{1}{5}\right]$ b/ $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[g.p.; q=\frac{2}{3}\right]$

c/ $(1-n)_{n=1}^{\infty}$ $[a.p.; d=-1]$ d/ $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[ani\ a.p.\ ani\ g.p.]$

4/ Posloupnost je dána rekurentně. Určete prvních pět členů a rozhodněte, které Posloupnosti jsou aritmetické, a které geometrické.

a/ $a_1=7;\ a_{n+1}=2a_n-3n-1$ $[a.p.; 7; 10; 13; 16; 19]$

b/ $a_1=8;\ a_{n+1}=a_n+4\cdot 2^n$ $[g.p.; 8; 16; 32; 64; 128]$

c/ $a_1=5;\ a_2=3;\ a_{n+2}=2(a_n-3)-a_{n+1}$ $[a.p.; 5; 3; 1; -1; -3]$

5/ Určete a_1, d aritmetické posloupnosti, ve které platí:

a/ $a_4=9;\ a_{10}=21$ $[a_1=3; d=2]$

b/ $2a_2-a_3=20;\ a_4-5a_1=-95$ $[a_1=20; d=-5]$

c/ $a_1+a_2=5;\ {a_1}^2+{a_2}^2=13$ $[a_1=3; d=-1\ nebo\ a_1=2; d=1]$

d/ $a_4+a_5=4;\ a_4\cdot a_5=-5$ $[a_1=-19; d=6\ nebo\ a_1=23; d=-6]$

6/ Určete a_1, q geometrické posloupnosti, ve které platí:

a/ $a_2=16;\ a_4=1$ $\left[a_1=64; q=\frac{1}{4}\ nebo\ a_1=-64; q=-\frac{1}{4}\right]$

b/ $a_1+a_2-a_4=-110;\ a_2+a_3-a_5=-220$ $[a_1=22; q=2]$

c/ $a_2+a_3=60;\ a_1+a_4=252$ $\left[a_1=2; q=5\ nebo\ a_1=250; q=\frac{1}{5}\right]$

d/ $a_2\cdot a_3=9;\ a_2+a_3=10$ $\left[a_1=81; q=\frac{1}{9}\ nebo\ a_1=\frac{1}{9}; q=9\right]$

7/ Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s těmito čísly tvořila pět po sobě jdoucích členů: a/ aritmetické posloup. $[168; 328; 488]$

b/ geometrické posloup. $[24; 72; 216\ nebo -24; 72; -216]$

8/ Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2-10x+16=0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s kořeny tvořila šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.

$[3{,}2; 4{,}4; 5{,}6; 6{,}8\ nebo\ 6{,}8; 5{,}6; 4{,}4; 3{,}2]$

9/ Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři po sobě jdoucí členy a. p. s $d=-3$ a poslední tři tvořila tři po sobě jdoucí členy g.p. s $q=\frac{1}{2}$ $\left[9; 6; 3; \frac{3}{2}\right]$

10/ Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy a. p. Obvod trojúhelníku je $96cm$. Určete délky stran. $[24cm; 32cm; 40cm]$

11/ Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy g. p., součet délek všech hran kvádru Je $84cm$. Jeho objem je $64cm^3$. Určete S. $[S=168cm^2]$

12/ Zjistěte, které z nekonečných řad jsou konvergentní a určete jejich součty

a/ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $[K; s = 1{,}5]$ $b/$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\left[K; s = -\frac{2}{5}\right]$

c/ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$ $\left[K; s = \frac{1}{4}\right]$ d/ $\sum_{n=1}^{\infty}(1{,}2)^n$ $[D]$

13/ Zjistěte, pro která $x \in R$ je řada konvergentní a určete její součet

a/ $1 + (x+3) + (x+3)^2 + \cdots$ $\left[x \in (-4;\ -2); s = -\frac{1}{2+x}\right]$

b/ $1 + \sqrt{1-x} + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 + \cdots$ $\left[x \in (0; 1\rangle; s = \frac{1+\sqrt{1-x}}{x}\right]$

c/ $\sin x + sin^2 x + sin^3 x + \cdots$ $\left[x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}; s = \frac{\sin x}{1-\sin x}\right]$

14/ Řešte v R rovnice:

a/ $2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \cdots = 1$ $[\{-1\}; x \in (-\infty; 0)]$

b/ $1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{27}{x^3} + \cdots = \frac{4}{x-4}$ $[\{6\}; x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)]$

c/ $2 \cdot 3^{x+2} - 135 = 2(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \cdots)$ $[\{2\}]$

d/ $(x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 + \cdots = 1$ $[\{3{,}5\};\ \ x \in (2; 4)]$

15/ a/ řešte v R rovnici: $(2^x)^2 - \frac{32}{3} = 2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + \cdots$ $[2]$

b/ určete a_1, n v geometrické posloupnosti, ve které $a_n = 40, s_n = 75$

a kvocient je kořenem rovnice ad a/ $[a_1 = 5; n = 4]$

33. LIMITA POSLOUPNOSTI

Rozhodněte, které z posloupností jsou konvergentní, v kladném případě určete jejich limity:

1/ $\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 3]$

2/ $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 1]$

3/ $\left(\frac{2n}{n^2+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 0]$

4/ $\left(\frac{5+(-1)^n \cdot n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

5/ $\left(\frac{n^3-4}{5n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

6/ $\left(\frac{(n-3)(2n-1)}{(n+1)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K, 2]$

7/ $\left(\frac{3n^2+4n+5}{4n^3-2n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; O]$

8/ $\left(\frac{5n^2-4n+3}{3n^2+2n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[K; \frac{5}{3}\right]$

9/ $\left(\frac{n(3n-2)}{(1-n)(2+n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; -3]$

10/ $\left(\frac{3+(-1)^n \cdot n^2}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

11/ $\left(\frac{n^4-6}{4n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

12/ $\left(\frac{(n+3)(2n+1)}{(n+1)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 2]$

13/ $\left(\frac{(n-3)^2}{(n^2-1)(n+3)}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 0]$

14/ $\left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

15/ $\left(\frac{(n-1)(2n^2+3)}{(n+2)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[D]$

16/ $\left(\frac{n}{n-1} + \frac{3n-n^2}{3n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[K; \frac{2}{3}\right]$

17/ $\left(\frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; -1]$

18/ $\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[K; 1]$

34. OPERACE S KOMBINAČNÍMI ČÍSLY, FAKTORIÁLY, BINOMICKÁ VĚTA

1/ Zjednodušte:

a/ $\frac{1}{n!}-\frac{n}{(n+1)!}$ $\left[\frac{1}{(n+1)!};n\geq 0\right]$ b/ $\frac{n}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-4)!}$ $\left[\frac{3}{(n-3)!};n\geq 4\right]$

c/ $2\frac{n^2-16}{(n+4)!}+\frac{n^2+5}{(n+3)!}+\frac{3}{(n+2)!}$ $\left[\frac{1}{(n+1)!};n\geq 0\right]$ d/ $\frac{2}{n!}-\frac{2n}{(n+1)!}-\frac{2n+4}{(n+2)!}$ $[0;n\geq 0]$

e/ $\frac{(n-1)!}{3n!}+\frac{n!}{4(n+1)!}$ $\left[\frac{7n+4}{12n^2+12n};n\geq 1\right]$ f/ $\frac{(n-1)!}{3n!}\cdot\frac{n!}{4(n+1)!}$ $\left[\frac{1}{12n^2+12n};n\geq 1\right]$

g/ $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}+2\frac{(n+4)!}{(n+2)!}+\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ $[2;n\geq 0]$ h/ $\frac{(n+1)!}{n!}+4\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-\frac{9n!}{(n-1)!}$ $[(2n-1)^2;n\geq 1]$

2/ Řešte rovnice s neznámou $n\in N$

a/ $5(n+1)!=(n+2)!$ $[\{3\}]$ b/ $(n+2)!\,n!=24(n+1)!\,(n-1)!$ $[\{4\}]$

c/ $(n+1)!-16(n-1)!=n!$ $[\{4\}]$ d/ $(n-90)!+4(n-91)!=(n-89)!$ $[\{92\}]$

e/ $\frac{n!}{(n-2)!}=4n$ $[\{5\}]$ f/ $\frac{(2n+1)!}{(2n)!}+\frac{(3n)!}{(3n-1)!}=\frac{(n+1)!}{2n!}+50$ $[\{11\}]$

g/ $\frac{10-17n}{(n+1)!}+\frac{4}{(n-1)!}=0$ $[\{2\}]$ h/ $\frac{(n+6)!}{(n+4)!}-n\frac{(n-4)!}{(n-5)!}=5n+80$ $[\{5\}]$

3/ Vyjádřete jedním kombinačním číslem

a/ $\binom{17}{8}+\binom{17}{9}$ $\left[\binom{18}{9}\right]$ b/ $\binom{11}{7}+\binom{11}{5}$ $\left[\binom{12}{5}\right]$

c/ $\binom{10}{1}+\binom{10}{0}+\binom{11}{9}$ $\left[\binom{12}{2}\right]$ d/ $\binom{12}{3}+\binom{4}{3}-\binom{12}{9}$ $\left[\binom{4}{3}\right]$

e/ $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}$ $\left[\binom{7}{4}\right]$ f/ $\binom{20}{20}+\binom{21}{20}+\binom{22}{20}+\binom{23}{20}$ $\left[\binom{24}{21}\right]$

4/ Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

a/ $\binom{10}{4}x=\binom{12}{6}$ $\left[\left\{\frac{22}{5}\right\}\right]$

b/ $\binom{6}{3}=2\left[x+\binom{5}{1}\right]+\frac{1}{2}\binom{4}{3}$ $[\{4\}]$

c/ $\left[x+\binom{1}{1}\right]\cdot\left[x-\binom{2}{2}\right]=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$ $[\{\pm 3\}]$

d/ $\binom{5}{0}x^2-x\binom{2}{2}-\binom{8}{4}:\binom{7}{3}=0$ $[\{-1;2\}]$

e/ $\left[\binom{x}{2}\right]^2-2\binom{6}{5}\cdot\binom{x}{2}-\binom{7}{3}-\binom{5}{3}=0$ $[\{6\}]$

f/ $\binom{x}{2}+\binom{x+1}{2}=25$ $[\{5\}]$

g/ $\binom{x}{1}+\binom{x-3}{x-4}=2x-3$ $[\{4;5;6;\dots\}]$

h/ $\binom{x-1}{x-3}-2\binom{x-2}{x-4}=0$ $[\{5\}]$

i/ $2\binom{x+6}{x+4}-\binom{x+4}{x+2}=4!+\binom{5}{2}x$ $[\{0;5\}]$

j/ $\binom{x+1}{x+1}+\binom{5}{3}\binom{x+1}{x}-\binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1}=1$ $[\{5\}]$

k/ $5\binom{x+8}{x+7}-\binom{x}{1}=2\binom{x}{0}\binom{x+1}{x}\binom{x}{x-1}$ $[\{5\}]$

l/ $\left[\binom{x}{1}\right]^2-11=2\left[\binom{x-1}{1}+\binom{x-2}{2}\right]\binom{x-3}{0}$ $[\{5\}]$

5/ Vypočítejte:

a/ $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$ $\left[41+29\sqrt{2}\right]$

b/ $\left(1-2\sqrt[3]{3}\right)^6$ $\left[97-708\sqrt[3]{3}-516\sqrt[3]{9}\right]$

c/ $\left(x+\sqrt{x}\right)^4$ $\left[x^4+4\,x^3\sqrt{x}+6x^3+4x^2\sqrt{x}+x^2\right]$

d/ $\left(y-\frac{1}{2y}\right)^5$ $\left[y^5-\frac{5}{2}\,y^3+\frac{5}{2}y-\frac{5}{4y}+\frac{5}{16y^3}-\frac{1}{32y^5}\right]$

6/ Určete:

a/ 5. člen binomického rozvoje výrazu $(1+y)^{10}$ $[210y^4]$

b/ 10. člen binomického rozvoje výrazu $(2a+b)^{15}$ $[320\,320a^6b^9]$

c/ 4. člen binomického rozvoje výrazu $(x+2)^{12}$ $[1760x^9]$

7/ Určete: a/ který člen binomického rozvoje výrazu $(5-2m)^7$ obsahuje m^4 $[5.\,člen]$

b/ který člen binomického rozvoje výrazu $(y^2+y^{-1})^9$ obsahuje y^3 $[6.\,člen]$

c/ který člen binomického rozvoje výrazu $(x+1)^{12}$ obsahuje x^6 $[7.\,člen]$

35. KOMBINATORIKA (variace, permutace a kombinace bez opakování)

1/ Kolik šesticiferných přirozených čísel, která jsou dělitelná 4, můžeme vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6. [192]

2/ K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a/ určete počet vlajek, které lze z těchto barev sestavit $[60]$

b/ kolik z nich má modrý pruh $[36]$

3/ Kolika způsoby lze postavit ne poličku do řady 10 různých českých a 5 různých anglických knih tak, že nejdříve budou české a za nimi anglické. $[435\ 456\ 000]$

4/ Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5 000, v jejichž zápise se vyskytují číslice 2, 3, 4, 7, 8. $[120]$

5/ Kolik variant přijímacích testů můžeme vytvořit, vybíráme-li ě otázky z 30 do dějepisu, 2 z 25 do ČJ, 1 z 20 do zeměpisu. $[2\ 610\ 000]$

6/ S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet: a/ všech možných pořadí jejich vystoupení $[720]$

b/ všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E $[120]$

7/ Petr má 7 knih, Ivana má 10 knih. Určete kolika způsoby si Petr může vyměnit 2své knihy za 2 Ivaniny. [945]

8/ V kupé vagónu jsou proti sobě 2 lavice po 5 místech. Z 10 cestujících chtějí 4 sedět ve směru jízdy, 3 proti směru a ostatním je to jedno. Určete, kolika způsoby se mohou posadit. $[43\ 200]$

9/ Kolika způsoby lze ze 7 mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou:

a/ právě 2 ženy $[210]$

b/ aspoň 2 ženy $[371]$

10/ Určete počet prvků, z nichž lze utvořit 2X více čtyřčlenných variací než tříčlenných. $[5]$

11/ Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací 12X. určete původní počet prvků. $[2]$

12/ Jsou dány číslice 0, 1, 2, 3, 5, 7: a/ kolik čtyřciferných přirozených čísel z nich lze sestavit $[300]$

b/ kolik z těchto čísel je lichých $[192]$

13/ Kolik je třeba vzít prvků, aby počet tříčlenných variací z nich vytvořených, byl stejný jako počet tříčlenných kombinací zvětšený o pětinásobný počet prvků. $[4]$

14/ Dvě skupiny mají dohromady 26 prvků, z nichž lze vytvořit 160 dvoučlenných kombinací. Kolik je prvků v každé skupině. $[11\ a\ 15]$

15/ Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy. Určete:

a/ kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře $[5\ 040]$

b/ kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a/ tak, aby právě jedním z nich byla žena $[1\ 920]$

36. PRAVDĚPODOBNOST

1/ Letadlo s 12 cestujícími a 3 členy posádky nouzově přistálo. Došlo ke zranění 6 osob. Jaká je pravděpodobnost, že byl zraněn právě 1 člen posádky. [0,47]
2/ jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné číslo je mocnina čísla 2 nebo 3. [0,056]
3/Student je ke zkoušce připraven na 70% otázek z 30. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 3 vylosovanými otázkami budou 2, na které umí odpovědět. [0,466]
4/ Jaká je pravděpodobnost, že při hodu černou a bílou kostkou padne součet dělitelný třemi. [0,33]
5/ Z 10 studentů, mezi nimiž jsou Adam a Petr, vylosujeme tři. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude Adam nebo Petr. [0,53]
6/ Ve třídě je 18 dívek a 13 chlapců. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybraném 4 členném družstvu budou 2 dívky a 2 chlapci.
7/ V krabici je 15 modrých a 10 žlutých kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 4 najednou vytaženými kuličkami budou nejvýše 2 modré. [0,53]
8/ V prvním osudí je 7 bílých a 3 červené kuličky, ve druhém osudí je 6 bílých a 14 červených kuliček. Zvolíme náhodně osudí a z něj vytáhneme 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá. [0,5]
9/ Hodíme bílou a černou kostkou. S jakou pravděpodobností padne na černé kostce větší číslo než na bílé. [0,417]
10/Ze 100 součástek, mezi nimiž je 15 vadných, vybíráme ke kontrole 10. Ukázalo se, že prvních 8 součástek bylo bez vady. Jaká je pravděpodobnost, že i devátá součástka bude bez vady. [0,837]
11/ V krabici je 8 bílých, 7 červených a 5 modrých kuliček. S jakou pravděpodobností budou mezi 3 náhodně vybranými kuličkami a/ všechny stejné barvy [0,089] b/ každá jiné barvy [0,246]
12/ Při výstupní kontrole se sledují 2 nezávislé ukazatele kvality A,B. Aby výrobek prošel, musí splnit oba. Kontrolou prošlo 93,1% výrobků, přičemž ukazatel A splnilo 98%. Kolik % výrobků splnilo ukazatel B. [95%]
13/ Určete s jakou pravděpodobností padne při hodu 2 kostkami součet 5, jestliže na 1. kostce padne č.2. [0,17]
14/ V továrně se 40% produkce určitého výrobku vyrábí na jedné lince a 60% na druhé lince. Pravděpodobnost vadného výrobku je 0,004 na 1. lince a 0,008 na 2. lince. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je vadný. [0,0064]
15/ Z osudí, v němž je 9 bílých a 6 černých kuliček táhneme postupně 4 krát bez vracení 1 kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že a/ v 1. tahu vytáhneme bílou [0,6]
b/ v prvních dvou tazích vytáhneme bílou [0,343]
c/ Ve 4.tahu černou, víme-li, že jsme už vytáhli 2 černé a 1 bílou [0,33]
16/ Při kolaudaci se zjistilo, že v 20% bytů nepřiléhají okna a v 5% dveře. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybraném bytě nebude žádná z těchto závad. [0,76]
17/ Ve třídě je 32 žáků, z nichž 10 není připraveno. V hodině budou 3 žáci zkoušeni. S jakou pravděpodobností budou aspoň 2 z nich připraveni. [0,766]
18/ V osudí je 6 bílých, 4 černé a 5 modrých lístků. Táhneme postupně 3, přičemž každý vytažený do osudí vrátíme dříve, než táhneme další. S jakou pravděpodobností bude 1. bílý, 2. černý a 3. modrý. [0,036]
19/ Kruhový terč má tři pásma. Pravděpodobnost zásahu do 1.pásma při jednom výstřelu je 0,15, do 2.pásma 0,23 a do 3.pásma 0,17. Jaká je pravděpodobnost minutí cíle při jednom výstřelu. [0,45]
20/ V kanceláři pracují dvě sekretářky. První přijde pozdě do práce s pravděpodobností 0,.1 a druhá s pravděpodobností 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že a/ obě přijdou včas [0,72]
b/ aspoň jedna přijde včas [0,98]

37. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

1/ Vypočítejte:

a/ $(2+i)(3+i)(1+2i)$ $[-5+15i]$ b/ $(i-1)(2i-3)-i$ $[1-6i]$

c/ $(2+i)i+\frac{3+i}{2-i}$ $[3i]$ d/ $\frac{2+i}{i}+\frac{i}{i+1}-\frac{2i+1}{i-1}$ $[1]$

e/ $1+i+i^2+i^3+i^4$ $[1]$ f/ $1+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$ $[1-i]$

g/ $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot \ldots \cdot i^{10}$ $[-i]$ h/ $i^2\cdot i^4\cdot i^6\cdot \ldots \cdot i^{20}$ $[-1]$

i/ $|(7+i)(4-3i)|$ $[25\sqrt{2}]$ j/ $\left|\frac{4-2i}{3+i}\right|$ $[\sqrt{2}]$

k/ $\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right|\cdot\left|\frac{1+i}{3-i}\right|}{|2i-1|+|-i|}$ $\left[\frac{5-\sqrt{5}}{20}\right]$ l/ $\left|\frac{|4-3i|+i}{3-2i}\right|$ $[\sqrt{2}]$

2/ Určete, pro která reálná čísla b je komplexní číslo $z=\frac{8-6b-ib}{1-ib}$

a/ reálné $\left[\left\{0;\frac{7}{6}\right\}\right]$ b/ imaginární $\left[R-\left\{0;\frac{7}{6}\right\}\right]$ c/ ryze imaginární $[2;4]$

3/ Dokažte, že dané číslo je komplexní jednotkou:

a/ $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}-i\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$ b/ $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{4}$

4/ Určete všechna $x\in R$ tak, aby dané číslo bylo komplexní jednotkou:

a/ $x+1+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\}\right]$ b/ $\frac{\sqrt{3}}{2}+xi+\frac{i}{2}$ $[-1;0]$ c/ $(1+i)\frac{\sqrt{x}}{4}+(1-i)\frac{\sqrt{5}}{4}$ $[\{3\}]$

5/ Upravte a výsledek zapište v goniometrickém vztahu:

a/ $\frac{-1+2i}{1+3i}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)\right]$ b/ $\frac{1+i}{1-i}$ $\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

c/ $\frac{i-3}{2+i}$ $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,sin\,\frac{3}{4}\pi\right)\right]$ d/ $\frac{i-2}{4i-8}$ $\left[\frac{1}{4}(\cos 0+i\sin 0)\right]$

6/ Převeďte na algebraický tvar:

a/ $z=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi++i\sin\frac{7}{6}\right)$ $[-2\sqrt{3}-2i]$ b/ $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ $[i]$

c/ $z=5(\cos 11\pi+i\,sin\,11\pi)$ $[-5]$ d/ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{105}{4}\pi+isin\frac{105}{4}\pi\right)$ $[1+i]$

7/ Vypočítejte součin a podíl komplexních čísel z_1, z_2 a výsledek vyjádřete v goniometrickém i algebraickém tvaru:

a/ $z_1=2(\cos 105°+i\sin 105\,°);\ z_2=4(\cos 225°+i\,sin\,225°)$

$\left[z_1\cdot z_2=8(\cos 330°+i\sin 330°)=4\sqrt{3}-4i;\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}(\cos 240°+i\,sin 240°)=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right]$

b/ $z_1=2\left(\cos\frac{5}{3}+i\,sin\frac{5}{3}\right);\ z_2=4\left(\cos\frac{1}{6}\pi+isin\ \frac{1}{6}\pi\right)$

$\left[z_1\cdot z_2=8\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\,sin\frac{11}{6}\pi\right)=4\sqrt{3}-4i\,;\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\,sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{1}{2}i\right]$

8/ Vypočtěte užitím Moivreovy věty

a/ $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{50}$ $[i]$ b/ $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{31}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

c/ $\left(\sqrt{3}-i\right)^{8}$ $\left[2^7\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]$ d/ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}$ $[i]$

38. LIMITA FUNKCE

Vypočítejte limitu funkce:

1/ $\lim_{x\to-5}\frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

2/ $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+x}$ $[-3]$

3/ $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-16}$ $[0]$

4/ $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^2-x-6}$ $\left[-\frac{7}{5}\right]$

5/ $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2-2x-2}$ $[4]$

6/ $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

7/ $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{8-x^3}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

8/ $\lim_{x\to y}\frac{y-x}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$ $\left[2\sqrt{y}\right]$

9/ $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ $[2]$

10/ $\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $\left[-\frac{1}{56}\right]$

11/ $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

12/ $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$ $[4]$

13/ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ $[1]$

14/ $\lim_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$ $[-12]$

15/ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $[4]$

16/ $\lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

17/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ $[8]$

18/ $\lim_{x\to0}\frac{3tg^2x}{2x^2}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

19/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

20/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

21/ $\lim_{x\to\pi}\frac{tg\,x}{\sin 2x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

22/ $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x-\sin x}{sin^3x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

23/ $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x+\sin x}{\sin 2x}$ $[1]$

24/ $\lim_{x\to0}\frac{sin^2 2x}{1-\cos 2x}$ $[2]$

25/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{cos^2x}-tg^2x\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

26/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg\,x-1}{cotg\,x-1}$ $[-1]$

39. DERIVACE FUNKCE

Derivujte funkce:

1/ $y = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $\left[y' = 4x^3 - 6x + \frac{1}{2}\right]$

2/ $y = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 1$ $[y' = 20x^3 - 6x^2 + 8x - 8]$

3/ $y = \frac{2}{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$ $\left[y' = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

4/ $y = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{\sqrt{x}}$ $\left[y' = -\frac{3}{x^4} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}\right]$

5/ $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ $\left[y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

6/ $y = \frac{x}{x^3+2}$ $\left[y' = \frac{-2x^3+2}{(x^3+2)^2}\right]$

7/ $y = \frac{x-1}{x^2+2}$ $\left[y' = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}\right]$

8/ $y = \frac{5}{x^2} \cdot \sin x$ $\left[y' = \frac{-10\sin x}{x^3} + \frac{5\cos x}{x^2}\right]$

9/ $y = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2x}$ $\left[y' = \frac{\sqrt{x}-1}{2x^2}\right]$

10/ $y = \frac{x^2+1}{(1-x)^2}$ $\left[y' = \frac{2(x+1)}{(1-x)^3}\right]$

11/ $y = \sqrt{x^3 - 4x}$ $\left[y' = \frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}\right]$

12/ $y = \frac{2}{(3x^2+4x)^3}$ $\left[y' = \frac{-6(6x+4)}{(3x^2+4x)^4}\right]$

13/ $y = x\sqrt{1+x^2}$ $\left[y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

14/ $y = \frac{cos(2x-3)}{x^2}$ $\left[y' = -2\frac{xsin(2x-3)+cos(2x-3)}{x^3}\right]$

15/ $y = \sin 2x + cotg\,\sqrt{x}$ $\left[y' = 2cos2x - \frac{1}{2\sqrt{x}sin^2\sqrt{x}}\right]$

16/ $y = \ln(2x+1)$ $\left[y' = \frac{2}{2x+1}\right]$

17/ $y = \ln x^3$ $\left[y' = \frac{3}{X}\right]$

18/ $y = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$ $[y' = x^2 \ln x]$

19/ $y = \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) \cdot 4x^2$ $[y' = 8x\ln x]$

20/ $y = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ $\left[y' = \frac{2}{\sin x}\right]$

21/ $y = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ $\left[y' = \frac{2}{\cos x}\right]$

22/ $y = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$ $\left[y' = \frac{1}{\cos x}\right]$

Určení rovnice tečny a normály ke křivce

1/ Určete rovnici tečny a normály ke křivce $y = f(x)$ v bodě *T:*

a/ $y = x^3 - x^2 + 2x + 3; T[1; y_0]$ $[t: 3x - y + 2 = 0; n: x + 3y - 16 = 0]$

b/ $y = 2 - 4x - x^2; T[-3; y_0]$ $[t: 2x - y + 11 = 0; n: x + 2y - 7 = 0]$

c/ $y = 3x^2 - 3x + 2; T[1; y_0]$ $[t: 3x - y - 1 = 0; n: x + 3y - 7 = 0]$

d/ $y = \frac{1}{x}; T[-2; y_0]$ $[t: x + 4y + 4 = 0; n: 4x - y + 7{,}5 = 0]$

e/ $y = \frac{x+2}{x-2}; T[1; y_0]$ $[t: 4x + y - 1 = 0; n: x - 4y - 13 = 0]$

f/ $y = \frac{8}{x^2+4}; T[2; y_0]$ $[t: x + 2y - 4 = 0; n: 2x - y - 3 = 0]$

2/ Určete rovnici tečny paraboly dané rovnicí $y = x^2 - 4x + 3$, která svírá s osou *x* úhel 45°.

$\left[T\left[\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right]; t: x - y - 3{,}25 = 0\right]$

3/ Určete rovnici tečny ke křivce dané rovnicí $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}$, která má směrnici:

a/ $k = \frac{3}{4}$ $[t_1: 9x - 12y - 23{,}5 = 0;\ t_2: 6x - 8y - 5 = 0]$

b/ $k = 2$ $[t_1: 6x - 3y + 1 = 0;\ t_2: 12x - 6y - 25 = 0]$

4/ Určete rovnici tečny rovnoběžné s přímkou $3x - y + 5 = 0$ ke křivce dané rovnicí $y = x^2 - 2x + 3$

$[t: 3x - y - 3{,}25 = 0]$

5/ Napište rovnici tečny ke křivce v bodě *T:*

a/ $x^2 + y^2 = 4; T[1; y_0 > 0]$ $\left[t: x\sqrt{3} + 3y - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0\right]$

b/ $5x^2 + y^2 = 25; T[1; y_0 < 0]$ $\left[t: x\sqrt{5} - 2y - 5\sqrt{3} = 0\right]$

c/ $x^2 - 5y^2 = 5; T[-5; y_0 > 0]$ $[t: x + 2y + 1 = 0]$

40. PRŮBĚH FUNKCE, UŽITÍ EXTRÉMNÍCH HODNOT FUNKCE

1/ Vyšetřete průběh funkce:

a/ $y = x^3 - 3x$ b/ $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

c/ $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$ d/ $y = -x^4 + 2x^3$

e/ $y = x^4 - 2x^2$ f/ $y = 3x^4 + 4x^3$

g/ $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ h/ $y = x^3 - 3x^2$

i/ $y = \frac{1}{1+x^2}$ j/ $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

k/ $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ l/ $y = \frac{x^2+4}{x}$

m/ $y = \frac{3-x^2}{x+2}$ n/ $y = \frac{x}{x^2+1}$

2/ Číslo 100 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální. $[50; 50]$

3/ Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální. $[1]$

4/ V trojúhelníku ABC je $\alpha = 30°, b + c = 100.$ Určete *c* tak, aby obsah trojúhelníku byl maximální. [50]

5/ Vodní nádrž o objemu $32m^3$ má tvar kvádru s čtvercovou podstavou o straně *x* a hloubce *h*. Při jakých rozměrech *x, h* bude mít nádrž minimální povrch. $[x = 4m; h = 2m]$

6/ Z plechu tvaru čtverce o straně *a* máme zhotovit otevřenou krabici bez víka. Určete stranu čtverců, které musíme vyříznout z rohů, aby objem krabice byl maximální. $\left[\frac{a}{6}\right]$

7/ Na konzervu tvaru válce se má spotřebovat $5dm^2$ plechu. Jaké má mít konzerva rozměry, aby měla maximální objem. $[r \doteq 0{,}52dm; v \doteq 1{,}02dm]$

8/ Chceme oplotit výběh pro slepice, který má mít tvar pravoúhelníka. Máme k dispozici 200m pletiva a víme, že část plotu budou tvořit stěny drůbežárny, která má rozměry *16m x 10m*. Jaké rozměry musí mít výběh, aby jeho plocha byla maximální. $[56{,}5m\ x\ 56{,}5m]$

9/ Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníku a půlkruhu. Obvod půdorysu je *40m*. Určete rozměry půdorysu, víte-li, že byly stanoveny tak, aby plocha jeviště byla maximální. $[rozměry\ oddélníku\ 11{,}2m\ x\ 5{,}6m]$

10/ Najděte pravidelný čtyřboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem. $\left[a = v = \sqrt{\frac{1}{6}S} - krychle\right]$